TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

高校数学
数学Ⅲ　1

(見本)

関数と極限①　目次

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　数学Ⅲ

効果的な使い方

〈1セクションの構成〉

● 1セクション(§1，§2など)の学習は，次のようになっています。
これが，ほぼ1日の学習に相当します。

学習内容の説明
新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式を簡潔にまとめています。
➡よく読んで，しっかりと理解しよう

⇩

基本例題・例題
定理や公式がどのように使われるかを具体的に示してあります。基本例題は基本的な問題，例題は標準的な問題です。
➡考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング
例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。やさしい問題からむずかしい問題へ，ステップをふんで作られています。
問題番号に ＊がついているのは標準問題，無印は基本問題です。
(ここまでが1セクションに2～3回程度くり返されます。)

⇩

最後に，「もっと力をつけよう」がはいっていることがあります。ここでは，総合問題や，やや程度の高い問題を扱います。

解　　答
巻末に《解答》とくわしい解き方を書いた《詳解》がついています。問題番号の右の4桁数字は，《問題》，《解答》，《詳解》で共通です。答え合わせのとき活用してください。
➡答え合わせも学習のうち，1問1問しっかりと

〈効果的な使い方〉

※ 授業の進度に合わせて学習していこう

学習内容は，標準的な授業進度に合わせて配列されていますから，復習用としておおいに役立ててください。また，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用として利用することもできます。

時間に余裕のない場合は，よくわからないところにしぼって，重点的に学習しましょう。

※ 自分なりに使い方を工夫しよう

本文は表の部分のみ印刷してあります。1ページを完全にやり終えたら，はがしてしまうこともできます。裏の部分は解答を書き込んだり，補足を書き込んだりして自由に使ってください。自分なりに使い方を工夫しましょう。

※ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習でまちがえたところをチェックし，その問題を全部もう一度解きます。

§0　はじめに

◇極限について

「極限」という言葉は，私達の日常生活でもよく使われます。いま，手もとにある辞書で，この言葉の意味を調べてみると

① 物事のいちばん終わりのところ（旺文社・国語辞典）

② 或る量が一定の規則のもとに，或る確定した量に限りなく近づく場合，後者を前者の極限という（岩波書店・広辞苑）

という説明が載っています。

この「極限」という概念は，みなさんがこれから学習しようとしている「微分・積分」の基礎となるもので，きわめて重要なものです。一口でこの概念を説明することは困難ですが，おおよその数学的意味は，上に示した②でよいと思います。

それにしても，②の説明は抽象的で，明確な説明であるとはいえないようです。また，極限という用語は登場する場面によって，少しずつ違った意味をもっています。以下に，「数列の極限」と「関数の極限」について，できるだけわかりやすいように具体的に説明してみましょう。これからの学習の参考にしてください。

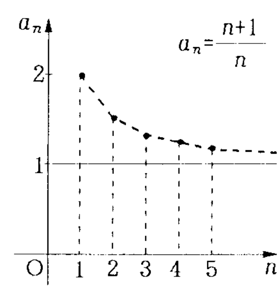
◇数列の極限

たとえば，第 n 項 a_n が

$$a_n=\frac{n+1}{n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるような数列 $\{a_n\}$；

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots\cdots$$



で，番号 n を限りなく大きくすると，右の図から，a_n は定数1に限りなく近づいていくことがわかります。このとき

数列 $\{a_n\}$ の極限は1である

というのです。また，このことを記号で

$n\to\infty$ のとき　$a_n\to 1$　　あるいは　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

と表します。

ここで，番号 n がどんなに大きくなっても，決して a_n が1に等しくならないことに十分注意してください。つまり，極限1はあくまでも a_n が近づくときの目標となっているだけなのです。

一般に，数列 $\{a_n\}$ の極限を次のように定めます。

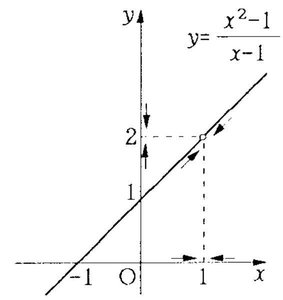
数列の極限

番号 n が限りなく大きくなるとき，a_n がある一定の値 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ の極限は α であるといって

$n\to\infty$ のとき　$a_n\to\alpha$　　あるいは　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

と表す。

◇関数の極限



たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ のとき分母を0とするので定義されていませんが，$x \neq 1$ のときは

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

となります。したがって，$f(x)$ のグラフは右の図のようになります。このグラフから，x が，1と異なる値をとりながら，1に限りなく近づくとき，$f(x)$の値は2に限りなく近づくことがわかります。このとき

$$x \to 1 \text{ のとき } f(x) \to 2 \qquad \text{あるいは} \qquad \lim_{x \to 1} f(x)=2$$

と表します。

ここで，x がどんなに1に近づいても，決して $f(x)$ が2に等しくならないことに十分注意してください。つまり，極限2はあくまでも $f(x)$ が近づくときの目標となっているだけです。

一般に，関数の極限を次のように定めます。

関数の極限

x が，a でない値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 b に限りなく近づくならば，関数 $f(x)$ の極限は b であるといって

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to b \qquad \text{あるいは} \qquad \lim_{x \to a} f(x)=b$$

と表す。

極限についての簡単な説明はこれで終わりにします。

微分と積分は，17世紀にニュートン（1642年～1727年）やライプニッツ（1646年～1716年）らによって樹立されましたが，これまで述べてきたような究極の概念がきちんと公式化されたのは，その後150年を経て19世紀のコーシー（1789年～1857年）による極限概念でした。そして，その後，微分と積分は，「微分積分学」として両輪で発展しているのです。ですから，みなさんがこれらをきちんと学習するにあたって，極限の概念は，どうしてもさけては通れません。「微分・積分」の根底に「極限」の概念があるのだということを覚えておくと，これからの学習も有意義なものとなるでしょう。

§1　分数関数

第1章では，次のような，いろいろな関数の極限について学習します。

整 関 数　$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

分数関数　$y=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}$

無理関数　$y=\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}$

三角関数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$

指数関数　$y=a^x$　$(a \fallingdotseq 1,\ a>0)$

対数関数　$y=\log_a x$　$(a \fallingdotseq 1,\ a>0)$

はじめに，y が x の分数式で表される分数関数についてです。

〔1〕分数式

A が整式で，B が定数でない整式のとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式を分数式といい，A を分子，B を分母といいます。たとえば，$\dfrac{x^2-1}{2x}$，$\dfrac{1}{x^2+2}$ などは，x についての分数式です。

分数式では，分母・分子に0でない同じ整式をかけても，分母・分子をその共通な因数で割っても，もとの分数式に等しくなります。

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}\qquad \frac{A}{B}=\frac{A\div D}{B\div D}\qquad (C \fallingdotseq 0,\ D \fallingdotseq 0)$$

したがって，分数式では，分数の場合と同様に，約分や通分ができます。また，分母と分子が共通な因数をもたない分数式のことを，既約分数式といいます。

分数式の乗法・除法は，分数の場合と同じようにして計算します。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

〈注意〉　分数式の商 $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}$ を $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$ と書き表すことがあります。

分数式の加法・減法は，分母を通分して，共通の分母をもつようにして計算します。

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

〈注意〉　トレーニングペーパーでは，分数式は数学Aで詳しく扱っています。

➜分数式の計算練習をしておきます。

■■■トレーニング■■■

1　(0001)

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{8x^3y}{12x^2y^2}$　　　　(2) $\dfrac{x^2+6xy+9y^2}{x^2+xy-6y^2}$

(3) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$　　　　(4) $\dfrac{x^3-1}{x^3-3x^2-6x+8}$

2 (0002)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{16b^3y^2}{27a^4x^3}\times\left(-\dfrac{81a^3x^6}{64by^4}\right)$　　　　(2) $\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1}\times\dfrac{x-x^2}{9x^2+6x+1}$

(3) $\dfrac{6x^2+3x}{3x^2+8x-3}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2+6x+9}$　　　　(4) $\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+3x+9}\div\dfrac{x^2-x-12}{x^3-27}$

3 (0003)

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{2}{x+1}$　　　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x^2-x-2}$

(3) $\dfrac{x+y}{x^3-y^3}-\dfrac{1}{x^2-y^2}$　　　　(4) $\dfrac{5}{x^2-xy-6y^2}-\dfrac{4}{x^2-4y^2}$

➜では；分数関数についての学習です。

〔2〕分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

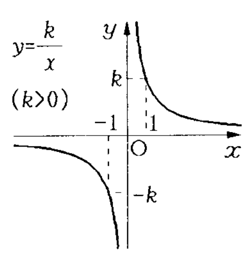
$y=\dfrac{1}{x}$ や $y=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ などのように，y が x の分数式で表される関数を分数関数といいます。分数関数の定義域は，分母が0になる x の値を除いた実数全体です。

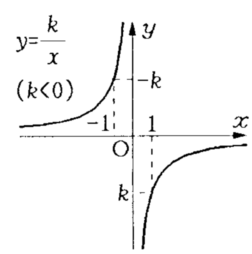
関数 $y=\dfrac{k}{x}$ ($k\neq0$) のグラフは，x と y が反比例の関係にあることを表し，そのグラフは右の図のように

　$k>0$ のとき　第1象限と第3象限

　$k<0$ のとき　第2象限と第4象限

にある2つの部分からなります。





この関数のグラフは，原点に関して対称で，直交する2直線 x 軸，y 軸を漸近線としています。このように，直交する2直線を漸近線とする双曲線を直角双曲線といいます。

➜それでは，直角双曲線をかくトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0004)

次の関数のグラフをかきなさい。また，その漸近線はどんな直線ですか。

(1) $y=-\dfrac{2}{x}$　　　　(2) $y=\dfrac{1}{2x}$

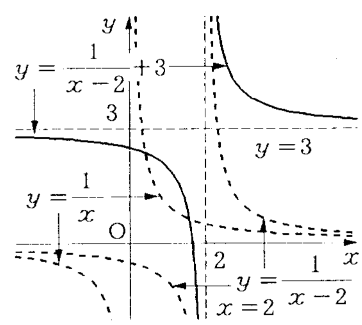
➜次に，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形の式で表される分数関数について考えてみましょう。

〔3〕分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

◇ $y=\dfrac{1}{x-2}+3$ のグラフ

関数 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$ の値と関数 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1}{x-2}$ の値を表にして比べてみましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$y=\dfrac{1}{x}$	…	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1		1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	…
$y=\dfrac{1}{x-2}$	…	$-\dfrac{1}{5}$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1		1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	…
$y=\dfrac{1}{x-2}+3$	…	$\dfrac{14}{5}$	$\dfrac{11}{4}$	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{5}{2}$	2		4	$\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{10}{3}$	…



この表から，$y=\dfrac{1}{x-2}+3$ の値は $y=\dfrac{1}{x-2}$ の値に3をたして得られること，$y=\dfrac{1}{x-2}$ の値は $y=\dfrac{1}{x}$ の値を右に2だけずらすことによって得られることがわかります。

すなわち，$y=\dfrac{1}{x-2}+3$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを

x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動

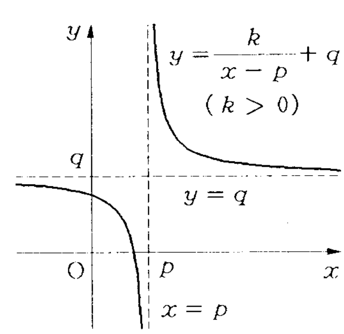
した直角双曲線で，漸近線は

2直線 $x=2$，$y=3$

になります。

➜一般に，関数 $f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，$y-q=f(x-p)$ のグラフになります。

◇分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ



分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x-2}+3$ のグラフと同様に考えて

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを

$\left\{\begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } p \\ y \text{ 軸方向に } q \end{array}\right\}$ だけ平行移動

した直角双曲線で，漸近線は

2直線 $x=p$，$y=q$

となります。

➜分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフをかくときは，点$(p,\ q)$を原点と考えて

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフをかけばよいのです。

基本例題 1　　分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

関数 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$ のグラフをかきなさい。

◆ 考え方 ◆

$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ において，$k=2$，$p=-1$，$q=3$ の場合です。

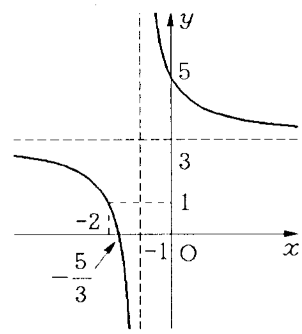
漸近線も示すようにしましょう。

◆ 解　答 ◆

関数 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した直角双曲線である。

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

漸近線は　2 直線 $x=-1$，$y=3$



➜グラフと y 軸との交点の y 座標は，$x=0$ のときの関数の値になります。

この場合，$x=0$ のとき　$y=5$

また，グラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ とする x の値です。

この場合，$0=\dfrac{2}{x+1}+3$ より　$0=\dfrac{3x+5}{x+1}$

ですから，この式の分子 $=0$ とする x の値で，$x=-\dfrac{5}{3}$ となります。

➜それでは，分数関数のグラフをかくトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

5　(0005)

次の関数のグラフをかきなさい。また，その漸近線はどんな直線ですか。

(1)　$y=\dfrac{2}{x+3}-3$　　　(2)　$y=-\dfrac{3}{x-2}+3$

〔4〕分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

◇分数式の分子の次数をさげる

A，B を x についての整式（A の次数$\geqq B$ の次数）とし，A を B で割ったときの商を Q，余りを R とすると

$A=BQ+R$　　R の次数 $<B$ の次数

この両辺を B で割ると

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

$\uparrow$ 整式　$\uparrow$ R の次数 $<B$ の次数

が得られます。

このことを利用して，分子の次数が分母の次数より高いか，等しい分数式を，整式と分子の次数が分母の次数より低い分数式の和で表すことができます。

たとえば，$\dfrac{2x+3}{x-1}$ において，分子を分母で割ると

商が 2，余りが 5

$$\begin{array}{r} 2 \\ x-1\,\overline{)\,2x+3} \\ \underline{2x-2} \\ 5 \end{array}$$

となるので

$$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{x-1}+2$$

と変形されます。

◇分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に直すと

$$y=\frac{\dfrac{bc-ad}{c}}{cx+d}+\frac{a}{c}$$

$$=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

$$\begin{array}{r} \frac{a}{c} \\ cx+d\,\overline{)\,ax+\qquad b} \\ \underline{ax+\quad \frac{ad}{c}} \\ \frac{bc-ad}{c} \end{array}$$

となります。よって，この関数のグラフは

2 直線 $x=-\dfrac{d}{c}$，$y=\dfrac{a}{c}$

を漸近線とする直角双曲線で，$y=\dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x}$ のグラフを平行移動したものになります。

➜ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ が分数関数であるとき，$c\neq 0$，$\dfrac{bc-ad}{c^2}\neq 0$，すなわち $c\neq 0$，$bc-ad\neq 0$ です。次の例題で，実際にグラフをかいてみましょう。

基本例題 2　分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

関数 $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ のグラフをかきなさい。

◆ 考え方 ◆

$\dfrac{2x+1}{2x-1}$ の分子を分母で割ると，商が 1，余りが 2 となります。

よって　$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}+1=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{2}}+1$

したがって，この関数のグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを平行移動したものになります。

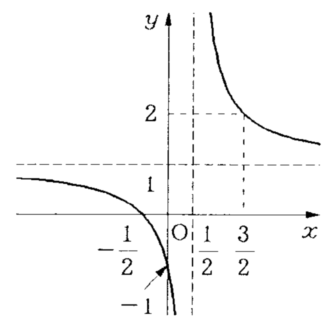
◆解　答◆

$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}+1=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{2}}+1$　　➜ $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形します。

より，この関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

漸近線は　　2 直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$



➜分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフをかくトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

6　(0006)

次の関数のグラフをかきなさい。また，その漸近線はどんな直線ですか。

(1)　$y=\dfrac{x}{x-1}$　　　(2)　$y=-\dfrac{2x+5}{2x+2}$

(3)　$y=-\dfrac{1}{x+2}$　　　(4)　$y=\dfrac{3x}{2x-1}$

➜次の例題は，分数関数のグラフをかいて，定義域が制限された分数関数の値域を求める問題です。

例題 1　　分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(\alpha\leqq x\leqq\beta)$ の値域

関数 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の値域を求めなさい。

◆考え方◆

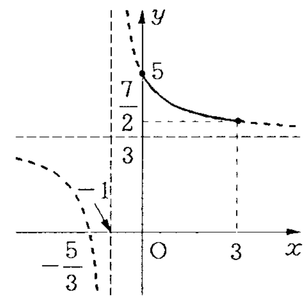
$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形して，$0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分のグラフをかけば値域が求められますね。

◆解　答◆

$y=\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+3$

より，関数 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ $(0\leqq x\leqq 3)$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$ のグラフの $0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分である。

➜関数 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$ のグラフは，2 直線 $x=-1$，$y=3$ を漸近線とする直角双曲線です。



よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。

この関数の値域は，グラフより

$$\left\{ y \,\middle|\, \frac{7}{2}\leqq y\leqq 5 \right\}$$

➜それでは，グラフをかいて，分数関数の値域や最大値・最小値を求めるトレーニングをしましょう。最大値・最小値も，同じようにグラフをかけば求められますね。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0007)

次の関数の値域を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{-3x+1}{x-1}$ $(x<0)$　　　(2) $y=\dfrac{-2x-3}{2x+4}$ $(-3<x<0,\ x\neq -2)$

8 ＊ (0008)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{3}{x-2}-1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$　　　(2) $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$ $(x<-2)$

➜次に，いくつかの条件が与えられているときに，その条件を満たすような分数関数の求め方を考えてみましょう。

例題 2　　　**分数関数の決定**

グラフが点 (1，1) を通り，漸近線が 2 直線 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-1$ の直角双曲線である分数関数を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

求める分数関数を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ とおくと，グラフの漸近線が 2 直線 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-1$ であることから $p=\dfrac{3}{2}$，$q=-1$ です。よって，求める分数関数は

$y=\dfrac{k}{x-\dfrac{3}{2}}-1$ とおくことができます。

◆ 解　答 ◆

グラフが 2 直線 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-1$ を漸近線とする直角双曲線であることから，求める

分数関数は

$$y=\frac{k}{x-\frac{3}{2}}-1$$

とおける。

グラフが点 (1, 1) を通ることから　$1=\dfrac{k}{1-\frac{3}{2}}-1$

これを解いて　$k=-1$

よって，求める分数関数は　$y=\dfrac{-1}{x-\frac{3}{2}}-1$

すなわち　$y=\dfrac{-2x+1}{2x-3}$

〈注意〉　分数関数は，$y=\dfrac{-1}{x-\frac{3}{2}}-1$ のように $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形で表してもよいのですが，右辺を通分して $y=\dfrac{-2x+1}{2x-3}$ と表しておくことが多いようです。

トレーニングペーパーでは $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形で表すことにします。

➜それでは，分数関数を決定するトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

9 ＊ (0009)

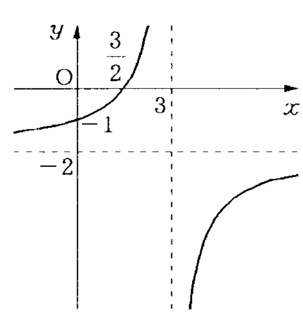
x の関数 $y=\dfrac{ax}{x+b}$ のグラフの漸近線が2直線 $x=1$，$y=2$ のとき，定数 a，b の値を求めなさい。

10 ＊ (0010)

グラフが点 (2, −1) を通り，漸近線が2直線 $x=1$，$y=3$ の直角双曲線である分数関数を求めなさい。

11 ＊ (0011)

図のような直角双曲線をグラフとする分数関数を求めなさい。



12 ＊ (0012)

分数関数 $y=\dfrac{ax}{x+b}$ のグラフが分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを平行移動したものであり，2直線 $x=1$，$y=2$ を漸近線とするとき，定数 a，b，k の値を求めなさい。

➔最後に，まだ余裕があれば，次のトレーニングもやってみましょう。絶対値記号をふくむ分数関数のグラフは，絶対値記号の中の式の符号によって場合分けをして，絶対値記号をはずすのですよ。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

13 * (0013)

関数 $y=\dfrac{x-1}{|x-3|}$ のグラフをかきなさい。

14 * (0014)

関数 $y=\dfrac{3x-5}{1-x}$，$y=\dfrac{2x+4}{x+1}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) この2つの関数のグラフは，ともにある分数関数 $y=\dfrac{a}{x}$ のグラフを平行移動したものとなります。定数 a の値を求めなさい。

(2) 関数 $y=\dfrac{3x-5}{1-x}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$ のグラフをどのように平行移動したものですか。

➔ここでは，分数関数について学習しました。

まとめておこう！

1. 分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを
　　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動
　した直角双曲線で，漸近線は
　　2直線 $x=p$，$y=q$
　となります。

2. 分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は，1.の形に変形して，グラフをかきます。

---

§2　無理関数

y が x の分数式で表される関数が分数関数でしたね。では，y が $\sqrt{\quad}$ の中に x をふくむ式で表される関数はどのようになるのでしょうか。ここでは，このことについて学習します。

➜まず，無理関数について基本的なことがらをまとめておきましょう。

〔1〕無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

$\sqrt{x}$，$\sqrt{2x-1}$，$-\sqrt{3x+1}+2$ などのように，根号の中に文字をふくむ式を無理式といいます。また，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{2x-1}$，$y=-\sqrt{3x+1}+2$ などのように，y が x の無理式で表される関数を無理関数といいます。

➜有理式（整式と分数式）で表される関数を有理関数，無理式で表される関数を無理関数といいます。

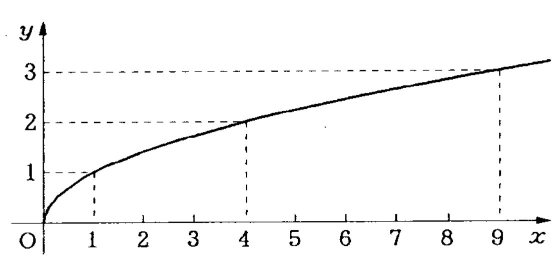
◇ $y=\sqrt{x}$ のグラフ

無理関数 $y=\sqrt{x}$ において，x の値に対応する y の値を表にしてみましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$	3

この関数は，$x=0$ のとき $y=0$，$x>0$ のとき，x の正の平方根が y の値となります。

よって，x の値が増加すれば，それに対応する y の値も増加し，グラフは右の図のようになります。



$x<0$ のとき，それに対応する y の値は，実数の範囲にはありません。すなわち，この関数が定義されるのは $x\geqq 0$ の範囲ですから，この関数の定義域は $\{x \mid x\geqq 0\}$ です。

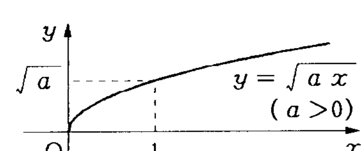
また，$\sqrt{x}\geqq 0$ から，値域は $\{y \mid y\geqq 0\}$ です。

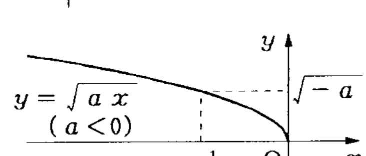
◇ $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

無理関数 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$ の値は，ax の正の平方根として定まりますから，次のことがわかります。

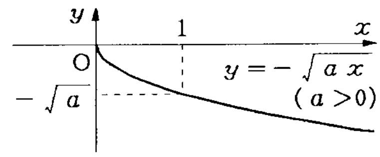
$a>0$ のとき　定義域は，$ax\geqq 0$ より　$\{x \mid x\geqq 0\}$
　　　　　　　値域は　$\{y \mid y\geqq 0\}$
$a<0$ のとき　定義域は，$ax\geqq 0$ より　$\{x \mid x\leqq 0\}$
　　　　　　　値域は　$\{y \mid y\geqq 0\}$

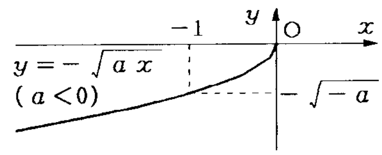
$\sqrt{\quad}$ の中の式が負にならないことに注意しましょう。





◇ $y=-\sqrt{ax}$ のグラフ





無理関数 $y=-\sqrt{ax}$ $(a \neq 0)$ の値は，ax の負の平方根です。よって，そのグラフは右の図のようになり，定義域，値域は次のようになります。

$a>0$ のとき　定義域は　$\{x \mid x \geqq 0\}$
　　　　　　　値域は　　$\{y \mid y \leqq 0\}$
$a<0$ のとき　定義域は　$\{x \mid x \leqq 0\}$
　　　　　　　値域は　　$\{y \mid y \leqq 0\}$

$y=-\sqrt{ax}$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したものになっています。

➜それでは，無理関数 $y=\sqrt{ax}$ や $y=-\sqrt{ax}$ のグラフをかくトレーニングをしましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0015)
次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=\sqrt{2x}$　　　　(2)　$y=-\sqrt{2x}$
(3)　$y=\sqrt{-2x}$　　　(4)　$y=-\sqrt{-2x}$

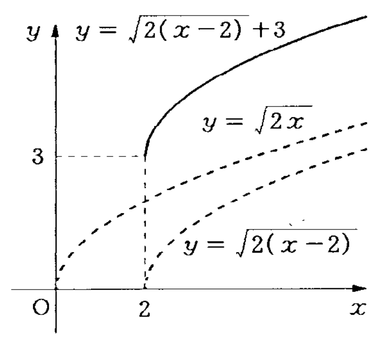
➜次に，$y=\sqrt{ax}$ や $y=-\sqrt{ax}$ のグラフを平行移動したグラフを表す関数について考えてみましょう。

〔2〕無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフ

◇ $y=\sqrt{2(x-2)}+3$ のグラフ

関数 $y=\sqrt{2(x-2)}+3$ の値と関数 $y=\sqrt{2x}$，$y=\sqrt{2(x-2)}$ の値を表にして比べてみましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y=\sqrt{2x}$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{14}$	4
$y=\sqrt{2(x-2)}$	／	／	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{3}$
$y=\sqrt{2(x-2)}+3$	／	／	3	$3+\sqrt{2}$	5	$3+\sqrt{6}$	$3+2\sqrt{2}$	$3+\sqrt{10}$	$3+2\sqrt{3}$



この表から，$y=\sqrt{2(x-2)}+3$ の値は
$y=\sqrt{2(x-2)}$ の値に3をたして得られること，
$y=\sqrt{2(x-2)}$ の値は $y=\sqrt{2x}$ の値を右に2だけずらして得られることがわかります。

すなわち，$y=\sqrt{2(x-2)}+3$ のグラフは，
$y=\sqrt{2x}$ のグラフを
　　x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動
したものになります。

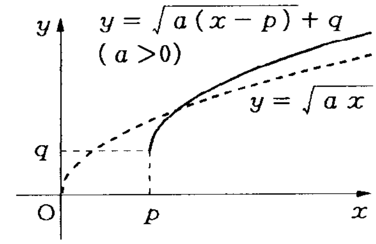
◇無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフ

無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフは，
$y=\sqrt{2(x-2)}+3$ と同じように考えて

$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

$\left\{\begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } p \\ y \text{ 軸方向に } q \end{array}\right\}$ だけ平行移動

したものになります。



$y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフも，同様に，
$y=-\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものになります。

◇無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフ

$y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a \neq 0)$ を $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ の形に変形すると

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

となります。

したがって，無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフは

$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

$\left\{\begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } -\dfrac{b}{a} \\ y \text{ 軸方向に } c \end{array}\right\}$ だけ平行移動

したものになることがわかります。

$y=-\sqrt{ax+b}+c$ のグラフも，同様に $y=-\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$，
y 軸方向に c だけ平行移動したものになりますね。

➔定義域や値域は，グラフから，x のとりうる値の範囲，y のとりうる値の範囲を求めればよいですね。

➔どうですか。無理関数のグラフが理解できましたか。次の例題で，具体的に無理関数のグラフや定義域，値域について考えてみましょう。

基本例題 1　　**無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフ**

関数 $y=\sqrt{2x+4}-1$ のグラフをかきなさい。また，この関数の定義域と値域を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$y=\sqrt{2x+4}-1$ を $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ の形に変形すると $y=\sqrt{2(x+2)}-1$ となります。

よって，この関数のグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものになります。

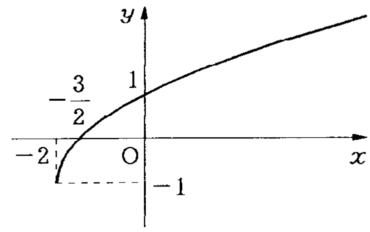
定義域と値域は，グラフから求めます。

◆ 解　答 ◆

$y=\sqrt{2x+4}-1$　　➔ $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ の形に変形します。
$\quad=\sqrt{2(x+2)}-1$

より，この関数のグラフは，関数 $y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。



グラフより

定義域は　$\{x \mid x \geqq -2\}$

値域は　$\{y \mid y \geqq -1\}$

〈注意〉　無理関数の定義域や値域は，グラフをかかなくても平方根の性質から求めることができます。

$y=\sqrt{2x+4}-1$ において，定義域は根号内の式の値が 0 以上となるような x の値の範囲ですから

$$2x+4 \geqq 0 \text{ より } \quad x \geqq -2$$

よって，定義域は　$\{x \mid x \geqq -2\}$

また，$x \geqq -2$ であるどんな x に対しても $\sqrt{2x+4} \geqq 0$ ですから

$$y=\sqrt{2x+4}-1 \geqq -1$$

よって，値域は　$\{y \mid y \geqq -1\}$

■■■トレーニング■■■

2　(0016)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=\sqrt{-x}-3$　　　　(2)　$y=-\sqrt{x}+2$

➜グラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ とする x の値です。

(1)の場合，$0=\sqrt{-x}-3$ より

$$\sqrt{-x}=3$$

両辺を平方して　$-x=9$

したがって，$x=-9$ となります。

3　(0017)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=-\sqrt{x+2}$　　　　(2)　$y=\sqrt{-2(x-1)}$

4　(0018)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=\sqrt{2x+4}-3$　　　　(2)　$y=-\sqrt{3-2x}+1$

5　(0019)

次の関数の定義域と値域を求めなさい。

(1)　$y=2\sqrt{x+1}-4$　　　　(2)　$y=-\sqrt{1-2x}+1$

➜定義域が制限されている無理関数の値域を求めるには，その定義域内におけるグラフをかいてみればよいのです。次の例題で考えてみましょう。

例題 1　無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ の値域

次の関数のグラフをかきなさい。また，その値域を求めなさい。

$y=\sqrt{2x+10}-2 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

◆考え方◆

$y=\sqrt{2x+10}-2$ を $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ の形に変形すると，$y=\sqrt{2(x+5)}-2$ となります。よって，$y=\sqrt{2(x+5)}-2$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分が求めるグラフとなります。

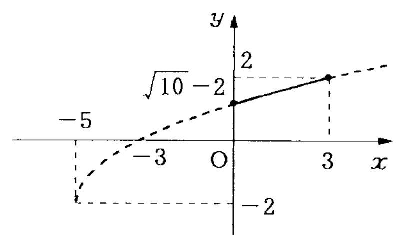
値域はグラフから求めましょう。

◆解　答◆

$$y=\sqrt{2x+10}-2$$
$$=\sqrt{2(x+5)}-2$$

より，関数 $y=\sqrt{2x+10}-2\ (0 \leqq x \leqq 3)$ のグラフは関数 $y=\sqrt{2(x+5)}-2$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分である。

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。



この関数の値域は，グラフより

$$\{\,y \mid \sqrt{10}-2 \leqq y \leqq 2\,\}$$

➜では，定義域が制限された無理関数の値域について，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0020)

次の関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=\sqrt{2x+6}\ \ (-1 \leqq x \leqq 5)$　　(2)　$y=\sqrt{10-2x}-1\ \ (-3<x<3)$

7 ＊ (0021)

次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

(1)　$y=\sqrt{2x+8}-2\ \ (0<x \leqq 4)$　　(2)　$y=-\sqrt{x+4}+1\ \ (-4<x \leqq 0)$

➜絶対値記号をふくむ無理関数については，x の変域を場合分けして，絶対値記号をはずして考えればよいですね。余裕のある人は，次のトレーニングに挑戦してみてください。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0022)

関数 $y=\sqrt{|x-2|}$ のグラフをかきなさい。

➜ここでは，無理関数について学習しました。

まとめておこう！

1.　無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフは

　　$a>0$ のとき　　定義域は $\{x \mid x \geqq 0\}$，グラフは右上がり

　　$a<0$ のとき　　定義域は $\{x \mid x \leqq 0\}$，グラフは右下がり

　値域は，いずれも $\{y \mid y \geqq 0\}$

2.　無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

　　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動

したものです。

§3　分数方程式・不等式と無理方程式・不等式

これまで，分数関数や無理関数について学習してきましたが，ここでは，分数方程式や分数不等式，無理方程式や無理不等式を，グラフを利用して解く方法を学習します。

➔まず，分数方程式と分数不等式について学習しましょう。

〔1〕分数方程式・不等式

◇分数方程式

分数関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ ………①のグラフと直線 $y=x$ ………②の共有点の座標は，①と②を連立方程式として解いて求めます。

①，②から y を消去すると

$$\frac{2}{x-1}=x \quad \cdots\cdots\cdots③$$

両辺に $x-1$ をかけて整理すると

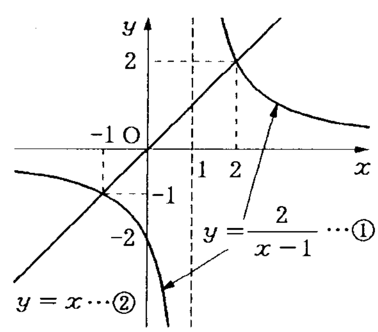
$$x^2-x-2=0$$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

これらの x の値は，③の分母を 0 としません。

$x=-1$ のとき　$y=-1$

$x=2$ のとき　$y=2$



よって，①と②のグラフは，右の図のように 2 点 $(-1,\ -1)$，$(2,\ 2)$ を共有します。

分数関数は分数式で表される関数ですから，分数関数のグラフと直線との共有点の座標を求めるときには，必ず③のような分数式をふくむ方程式を解くことになります。このような分数式をふくむ方程式を分数方程式といいます。

◇分数不等式

不等式 $\dfrac{2}{x-1}>x$ や $\dfrac{x-2}{x+1}\leqq-3x-2$ のように，未知数 x についての分数式をふくむ不等式を分数不等式といいます。

分数不等式 $\dfrac{2}{x-1}>x$ は，グラフを利用して解くとわかりやすくなります。

関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ ………①と関数 $y=x$ ………②を考えると，①の値が②の値より大きいとき，$\dfrac{2}{x-1}>x$ が成り立ちます。すなわち，①のグラフが②のグラフよりも上方にあるような x の値の範囲が，この不等式の解になるわけです。

①と②のグラフは上の図のようになりますから，この不等式の解は

$$x<-1,\ 1<x<2$$

となります。

➜分数方程式・不等式とグラフとの関係をしっかりつかんでおきましょう。

例題 1 分数方程式・不等式

関数 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) この関数のグラフと直線 $y=1$ との交点の座標を求めなさい。

(2) $y<1$ となる x の値の範囲を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

(1) $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ と $y=1$ を連立させ y を消去して分数方程式を導き，分母をはらって x の値を求めます。分母をはらったので，求めた x の値がもとの分数方程式の分母を 0 としないかどうか吟味(ぎんみ)します。

➜一般に，$P(x)$，$Q(x)$ が整式のとき

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \iff P(x)=0 \text{ かつ } Q(x)\neq 0$$

(2) $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ と $y=1$ のグラフをかいて，$y=\dfrac{3-x}{x-1}$ のグラフが直線 $y=1$ よりも下方にあるような x の値の範囲を求めます。

◆ 解 答 ◆

(1) $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ と $y=1$ を連立させて y を消去すると

$$\frac{3-x}{x-1}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

両辺に $x-1$ をかけて

$$3-x=x-1$$

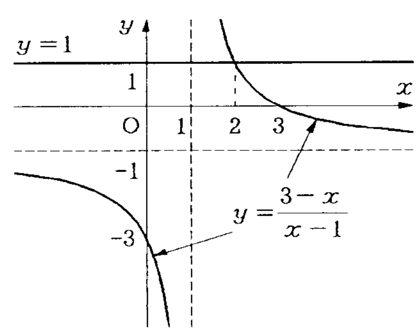
これを解いて　$x=2$

$x=2$ は，①の分母を 0 としない。

このとき　$y=1$

よって，求める交点の座標は　$(2,\ 1)$

(2) $y=\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-1$



(1)より，関数 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ のグラフと直線 $y=1$ との交点の座標は $(2,\ 1)$ だから，$y=\dfrac{3-x}{x-1}$ と $y=1$ のグラフは右の図のようになる。

グラフより，$y<1$ となる x の値の範囲は

$$x<1,\ 2<x$$

➜ $y<1$ となるのは，$y=\dfrac{3-x}{x-1}$ のグラフが直線 $y=1$ よりも下方にあるときです。

➜それでは，トレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

1 * (0023)

関数 $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ と関数 $y=-1$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

2 * (0024)

次の方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} y=-\dfrac{x}{x+1} \\ y=2x \end{cases}$　　(2) $\dfrac{2-x}{x+1}=3x+2$

3 * (0025)

次の不等式を，グラフを使って解きなさい。

(1) $\dfrac{3x-2}{x+1}\leqq 2$　　(2) $\dfrac{3-x}{x-1}\leqq 1$

4 * (0026)

次の不等式を，グラフを使って解きなさい。

(1) $\dfrac{2}{x}>-x+3$　　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}<-x$

5 * (0027)

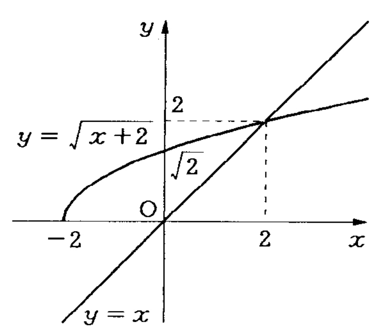
不等式 $-1<\dfrac{1}{x-2}\leqq 2$ を解きなさい。

➜次に，無理方程式と無理不等式について学習しましょう。

〔2〕無理方程式・不等式

◇無理方程式

無理関数 $y=\sqrt{x+2}$ ………①のグラフと，直線 $y=x$ ………②との共有点の座標は，①，②を連立させて求めた x，y の値の組になります。



①，②から y を消去すると

$\sqrt{x+2}=x$　　………③

両辺を平方して整理すると

$x^2-x-2=0$

これを解いて　　$x=-1,\ 2$

$x=-1$ は③を満たしません。

$x=2$ は③を満たします。このとき　$y=2$

よって，①と②のグラフは，上の図のように点 $(2,\ 2)$ を共有します。

無理関数は無理式で表される関数ですから，無理関数のグラフと直線との共有点の座標を求めるときには，必ず③のような無理式をふくむ方程式を解くことになります。このような無理式をふくむ方程式を無理方程式といいます。

◇無理不等式

$\sqrt{x+2}>x$ や $\sqrt{3-x}\leqq 1$ のように，未知数 x についての無理式をふくむ不等式を無理不等式といいます。

この無理不等式も，分数不等式と同じように関数のグラフを利用して解くことができます。

$\sqrt{x+2}>x$ について考えてみましょう。

関数 $y=\sqrt{x+2}$ ………①と関数 $y=x$ ………②を考えると，①の値が②の値より大きいとき，すなわち①のグラフが②のグラフよりも上方にあるような x の値の範囲がこの不等式の解になります。

①と②のグラフは上の図のようになりますから，この不等式の解は

$$-2\leqq x<2$$

となります。

➜無理関数の定義域は，根号内が0以上となるような x の値の範囲でしたね。無理方程式・不等式においても，根号内が0以上になる x の範囲で考えましょう。

例題2　　**無理方程式・不等式**

関数 $y=-\sqrt{x+2}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) この関数のグラフと直線 $y=x$ との交点の座標を求めなさい。

(2) $y>x$ となる x の値の範囲を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

(1) $y=-\sqrt{x+2}$ と $y=x$ を連立させ y を消去して無理方程式を導き，両辺を平方して x の値を求めます。両辺を平方したので，求めた x の値を吟味します。

➜一般に，$P(x)$，$Q(x)$ が整式のとき

$$\sqrt{P(x)}=Q(x) \iff P(x)=\{Q(x)\}^2 \text{ かつ } Q(x)\geqq 0$$

(2) $y=-\sqrt{x+2}$ と $y=x$ のグラフをかいて，$y=-\sqrt{x+2}$ のグラフが $y=x$ のグラフよりも上方にあるような x の値の範囲を求めます。

◆ 解　答 ◆

(1) $y=-\sqrt{x+2}$ と $y=x$ を連立させて y を消去すると

$$-\sqrt{x+2}=x \quad \cdots\cdots①$$

両辺を平方して　$x+2=x^2$　➜根号をはずします。

整理すると　$x^2-x-2=0$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

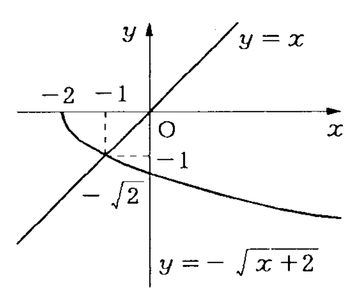
$x=-1$ は①を満たしている。　➜求めた x の値を吟味します。

このとき　$y=-1$

$x=2$ は①を満たさない。

よって，求める交点の座標は

$(-1,\ -1)$



(2) (1)より，$y=-\sqrt{x+2}$ と $y=x$ のグラフの交点の座標は $(-1,\ -1)$ だから，$y=-\sqrt{x+2}$ と $y=x$ のグラフは右の図のようになる。

グラフより，$y>x$ となる x の値の範囲は

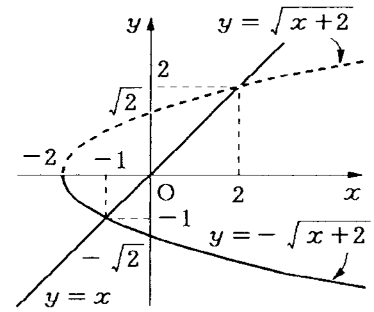
$$-2\leqq x<-1$$

➜ $y>x$ となるのは，$y=-\sqrt{x+2}$ のグラフが直線 $y=x$ よりも上方にあるときです。

➜ここで，ちょっとひと息入れてから，トレーニングにはいりましょう。

--------• ちょっとひとこと •--------

- 上の例題の(1)で，$x^2-x-2=0$ の2つの解 -1，2のうち，2は もとの無理方程式 $-\sqrt{x+2}=x$ を満たしません。このような解を無縁根（むえんこん）といいます。
- この無縁根2は何を表しているのでしょうか。
  $-\sqrt{x+2}=x$ を解くときに両辺を平方しましたが，左辺の平方は $(-\sqrt{x+2})^2 \to x+2$ ですね。ところが，$\sqrt{x+2}$ の平方も $(\sqrt{x+2})^2 \to x+2$ となります。
  すなわち，この無縁根2は，無理関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ との交点の x 座標を表しているのです。右の図を見れば，このことが理解できますね。



■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0028)

関数 $y=\sqrt{x-2}$ と関数 $y=1$ のグラフの交点の座標を求めなさい。

7 ＊ (0029)

次の方程式を解きなさい。

(1) $\sqrt{3x-2}=4$　　(2) $\sqrt{2x+1}=-3$

8 ＊ (0030)

次の方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} y=-\sqrt{6-2x} \\ y=x-3 \end{cases}$　　(2) $-\sqrt{x+2}=x$

9 ＊ (0031)

次の不等式を，グラフを使って解きなさい。

(1) $\sqrt{3-x}<1$　　(2) $\sqrt{x+2}>-2$

10 ＊ (0032)

次の不等式を，グラフを使って解きなさい。

(1) $\sqrt{2x-4} \geqq x-2$　　(2) $2\sqrt{-x}<-x+1$

11 ＊ (0033)

不等式 $1 \leqq \sqrt{1-2x} \leqq 2$ を解きなさい。

➜分数不等式や無理不等式を解くときは，分数関数や無理関数のグラフを利用することがポイントですね。最後に，次のトレーニングをやってみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

12 * (0034)

x についての方程式 $\dfrac{1}{x-1}=mx+3$ ………①の実数解の個数を求めなさい。ただし，m は実数とします。

13 * (0035)

x についての方程式 $\sqrt{x-4}=x+k$ ………①の実数解の個数を求めなさい。ただし，k は実数とします。

➜ここでは，分数方程式・分数不等式と無理方程式・無理不等式について学習しました。ここでの学習はこれで終わりです。

§4　合成関数と逆関数

ここでは，合成関数と逆関数について学習します。

合成関数や逆関数とはどのような関数なのでしょうか。また，逆関数のグラフはどのようになるのでしょうか。

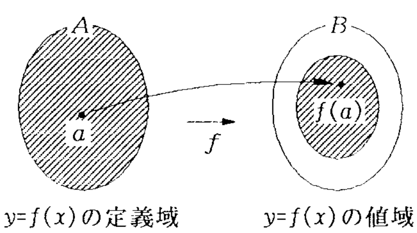
はじめに，写像という概念から，関数について考えてみます。

〔1〕写像と関数

2つの集合 A，B があって，A の任意の要素に対して B の要素がただ1つ対応するとき，この対応を，A から B への写像といい，記号 f などを用いて

$$f : A \longrightarrow B$$

と表されます。



ここで，集合 A をこの写像の定義域といいます。

また，A の各要素に対応する集合 B の要素全体の集合 $\{ f(a) \mid a \in A \}$ を，この写像の値域といいます。一般に，写像 $f : A \longrightarrow B$ の値域は，B の部分集合になります。

写像 $f : A \longrightarrow B$ において，f の値域が B と一致するとき，f を A から B の上への写像といいます。

また，A の異なる要素に B の異なる要素が対応するとき，すなわち，A の任意の要素 a_1，a_2 について

$$a_1 \neq a_2 \quad \text{ならば} \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

が成り立つとき，f を1対1の写像といいます。

とくに，A，B とも数の集合のとき，f を関数といいます。

➔では，写像について確認するトレーニングをやっておきましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0036)

10以下の自然数の集合を A とし，A から A への写像 f は，A の要素 a に a の正の約数の個数を対応させるものとします。次の問いに答えなさい。

(1)　$f(3)$，$f(8)$ を求めなさい。

(2)　写像 f の値域を求めなさい。

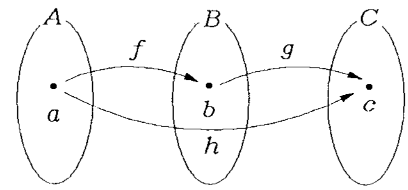
➔では，合成関数についての学習です。

〔2〕合成写像と合成関数

2つの写像

$f : A \longrightarrow B$

$g : B \longrightarrow C$



が与えられていて，A の要素 a に対して

$b = f(a)$

$c = g(b) = g(f(a))$

とすると，c は a によって定まります。A の各要素 a に，このようにして定まる C の要素 c を対応させると，1つの写像

$h : A \longrightarrow C$

が得られ，この写像 h を，f と g の合成写像といい，$g \circ f$ で表します。

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

写像 f と g がともに関数であるとき，合成写像 $g \circ f$ もまた関数で，これを f と g の合成関数といいます。

〈注意〉 2つの関数 f，g について，一般には $g \circ f \fallingdotseq f \circ g$ であり，合成関数については，交換法則は成り立ちません。

また，3つの関数 f，g，h について，一般に，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$，すなわち，結合法則が成り立ちます。

➜ここで，合成関数についての問題を解いてみましょう。

■■■トレーニング■■■

2 (0037)

2つの関数 $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2$ について，合成関数 $(f \circ g)(x)$，$(g \circ f)(x)$ をそれぞれ求めなさい。

➜一般に，2つの関数 f，g について，交換法則は成り立ちません。

3 (0038)

次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(f \circ g)(x)$，$(g \circ f)(x)$ を求めなさい。また，それぞれの定義域，値域を求めなさい。

(1) $f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$　　(2) $f(x)=2x+1$，$g(x)=\sqrt{x}$

4 (0039)

3つの関数 $f(x)=3x+1$，$g(x)=x^2$，$h(x)=\sqrt{x+1}$ について，合成関数 $(h \circ (g \circ f))(x)$，$((h \circ g) \circ f)(x)$ をそれぞれ求めなさい。

➜一般に，3つの関数 f，g，h について，結合法則が成り立ちます。

➜次に，逆関数について学習しましょう。

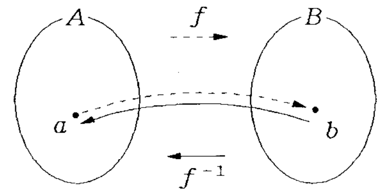
〔3〕逆写像と逆関数

◇逆写像と逆関数

写像 $f : A \longrightarrow B$ が，A から B の上への1対1写像であるとき，B の任意の要素 b に対して，$b = f(a)$ となる A の要素 a がただ1つ存在します。したがって，b に a を対応させせることにより，B から A への1対1写像が得られます。

この写像を f の逆写像といい，f^{-1} で表します。

写像 f が関数であるとき，$f^{-1}(x)$ を関数 $f(x)$ の逆関数といいます。



〈注意〉　関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，次のことが成り立ちます。

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

◇逆関数をもつための条件

関数 $y = x^2$ について考えてみると，$x = \pm 1$ に対応する y の値が1ですから，その逆の対応，すなわち $y = 1$ に対応する x の値は1つに定まりません。このように，逆の対応が関数にならないとき，その関数は逆関数をもたないのです。

一般に，関数 $y = f(x)$ において，その値域に属するおのおのの b に対して，$b = f(a)$ となる a がこの関数の定義域内にただ1つだけ定まるとき，この関数は逆関数をもちます。

たとえば，定義域内で増加する（グラフが右上がり），あるいは減少する（グラフが右下がり）関数は，$b = f(a)$ となる a がただ1つだけ定まるので必ず逆関数をもちます。

〈注意〉　逆関数の存在条件については，§22の連続関数の性質のところで詳しく扱います。

◇逆関数の求め方

一般に，$y = f(x)$ の逆関数は

①　もとの関数の式を x について解いて，$x = g(y)$ の形で表す。

②　x と y を入れかえて，$y = g(x)$ とする。
　　$y = g(x)$ の定義域は，$y = f(x)$ の値域と同じにとる。

という手順で求められます。

➜次の基本例題で，逆関数を求めてみましょう。

基本例題1　　　逆関数の求め方

次の関数の逆関数を求め，その定義域と値域をいいなさい。

(1)　$y = 2x - 3$　　　　(2)　$y = x^2 - 1 \quad (x \leqq 0)$

◆ 考え方 ◆

逆関数は，与えられた関数の式を x について解き，x と y を入れかえれば求められます。

また，逆関数の定義域と値域は，それぞれもとの関数の値域と定義域に等しいことから求めます。

◆解　答◆

(1)　$y=2x-3$ を x について解くと　　$x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x と y を入れかえて　　$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

これが求める逆関数である。

定義域は　　実数全体の集合　　➜もとの関数の値域，実数全体の集合と等しい。

値域は　　実数全体の集合　　➜もとの関数の定義域，実数全体の集合と等しい。

(2)　$y=x^2-1$ $(x\leqq 0)$ を x について解くと

$x^2=y+1$

$x=\pm\sqrt{y+1}$

ここで，$x\leqq 0$ だから

$x=-\sqrt{y+1}$

x と y を入れかえて

$y=-\sqrt{x+1}$

これが求める逆関数である。

定義域は　　$\{x \mid x\geqq -1\}$　　➜もとの関数の値域 $\{y \mid y\geqq -1\}$ と等しい。

値域は　　$\{y \mid y\leqq 0\}$　　➜もとの関数の定義域 $\{x \mid x\leqq 0\}$ と等しい。

➜逆関数の求め方はわかりましたね。
次の“ちょっとひとこと”を読んだら，逆関数を求めるトレーニングをしましょう。

--------•ちょっとひとこと•--------

- 基本例題の(2)の関数 $y=x^2-1$ $(x\leqq 0)$ は，定義域が $x\leqq 0$ と制限されているために逆関数をもつのです。もしもこの関数の定義域が実数全体の集合だったり，$-1\leqq x\leqq 1$ のようなときには，逆の対応が関数にならないため逆関数をもちません。
- このように逆関数をもたない関数でも，定義域を適当に制限することによって逆関数をもつ場合があります。

■■■トレーニング■■■

5　(0040)

次の関数のうち，逆関数をもつものはどれですか。記号で答えなさい。

㋐　$y=-2x+3$　　　　㋑　$y=x^2+1$

㋒　$y=\sqrt{x-1}$　　　　㋓　$y=x^2+1$ $(x\geqq 0)$

6　(0041)

次の関数の逆関数を求め，その定義域と値域をいいなさい。

(1)　$y=-2x+1$　　　(2)　$y=\sqrt{x-2}$　　　(3)　$y=\dfrac{1}{x-1}$

7　(0042)

次の関数の逆関数を求めなさい。また，その定義域と値域を求めなさい。

(1)　$y=-x^2+2$　$(x\geqq 0)$　　　(2)　$y=(x-1)^2$　$(x\leqq 1)$

8 (0043)

関数 $y=\dfrac{x+1}{2x+a}$ とその逆関数が一致するように，定数 a の値を定めなさい。

➜逆関数の求め方は理解できましたね。今度は，逆関数のグラフについて考えてみましょう。

〔4〕逆関数のグラフ

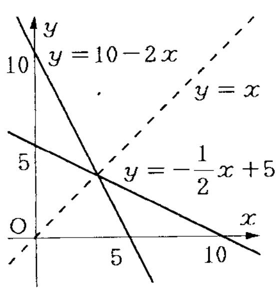
関数とその逆関数について，グラフがどのようになるか，いくつか調べてみます。

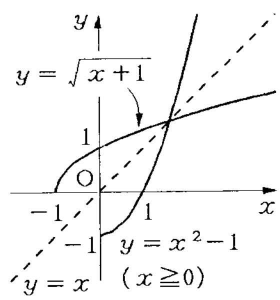
関数 $y=10-2x$ の逆関数は $y=\dfrac{10-x}{2}=-\dfrac{1}{2}x+5$ です。

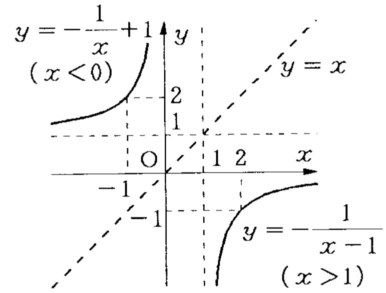
また，関数 $y=x^2-1$ $(x\geqq 0)$ の逆関数は $y=\sqrt{x+1}$ です。

もうひとつ，関数 $y=-\dfrac{1}{x-1}$ $(x>1)$ の逆関数は $y=-\dfrac{1}{x}+1$ $(x<0)$ です。

これらの関数のグラフは，下の図のようになります。







数学Ⅱで学習した，対数関数と指数関数についても調べてみます。

指数関数 $y=2^x$ において，x について解くと

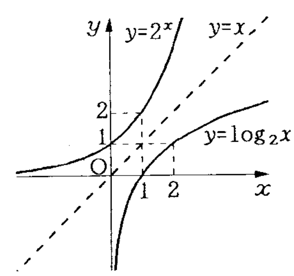
$$x=\log_2 y$$

x と y を入れかえて

$$y=\log_2 x$$

よって，対数関数 $y=\log_2 x$ は指数関数 $y=2^x$ の逆関数となります。

一般に，対数関数 $y=\log_a x$ は指数関数 $y=a^x$ の逆関数となります。



これらの図のどのグラフにおいても，もとの関数のグラフと逆関数のグラフは直線 $y=x$ に関して対称になっています。

一般に

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフとは
直線 $y=x$ に関して対称である

といえます。

➜基本例題に進みましょう。

基本例題2　逆関数のグラフ

次の関数の逆関数のグラフをかきなさい。また，その逆関数の定義域と値域を求めなさい。

(1) $y=3x-2$　　(2) $y=x^2-2$ $(x\geqq 0)$

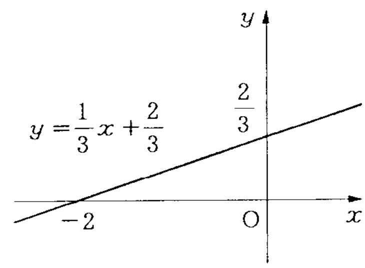
◆解　答◆

(1)　$y=3x-2$ を x について解くと

$$x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$$

x と y を入れかえて

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$



これが与えられた関数の逆関数で，そのグラフは右の図のようになる。

定義域は　　実数全体の集合

値域は　　実数全体の集合

(2)　$y=x^2-2$ $(x\geqq 0)$ を x について解くと

$$x^2=y+2$$

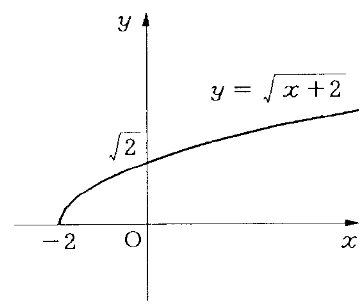
$$x=\pm\sqrt{y+2}$$

ここで，$x\geqq 0$ だから

$$x=\sqrt{y+2}$$

x と y を入れかえて

$$y=\sqrt{x+2}$$



これが与えられた関数の逆関数で，そのグラフは右の図のようになる。

定義域は　　$\{x \mid x\geqq -2\}$

値域は　　$\{y \mid y\geqq 0\}$

■■■トレーニング■■■

9　(0044)

次の関数の逆関数のグラフをかきなさい。また，その逆関数の定義域と値域を求めなさい。

(1)　$y=-\dfrac{1}{x-2}$　　　　(2)　$y=\sqrt{x+4}$

➜ 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ や無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ の逆関数のグラフもかいてみましょう。

これらの関数は，$y=a(x-p)^2+q$ や $y-c=\sqrt{ax+b}$ の形に変形すれば，逆関数を求めることができます。なお，もとの関数のグラフと逆関数のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であることにも注意しましょう。

10　(0045)

次の関数の逆関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^2+2x-3$ $(x\leqq -1)$　　　　(2)　$y=\sqrt{2-x}-1$

11　(0046)

次の関数の逆関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=3^{x-2}$　　　　(2)　$y=-2^x$

➜最後に，応用問題に挑戦しましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

12 ＊ (0047)

2つの関数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$ において，$(g \circ f)(x)$ の逆関数が $h(x)=\dfrac{x}{4}+1$ になるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

➜ここでは，合成関数と逆関数について学習しました。

まとめておこう！

1.　2つの関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ に対して，関数 $y=g(f(x))$ のことを，f と g の合成関数といい，$g \circ f$ で表します。

2.　関数 $y=f(x)$ の逆関数は，$y=f(x)$ を x について解き，x と y を入れかえてえられます。

関数 $y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ とでは

定義域と値域がたがいに入れかわる

グラフは，直線 $y=x$ に関して対称

となります。

§5　関数とそのグラフ(1)　グラフの移動

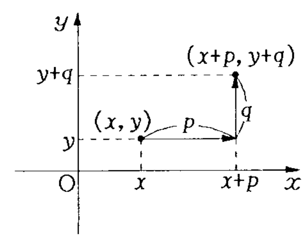
§5と§6では，これからいろいろな関数の極限を学習するにあたって，関数について知っておいて欲しい内容を載せておきますから，よく読んでおいてください。

ここでは，グラフの移動を利用して関数のグラフをかくことについて学習します。グラフの移動の代表的なものに，平行移動や対称移動があります。

➜まず，関数のグラフの平行移動について考えてみましょう。

〔1〕グラフの平行移動

◇点の平行移動



座標平面上の点$(x,\ y)$を

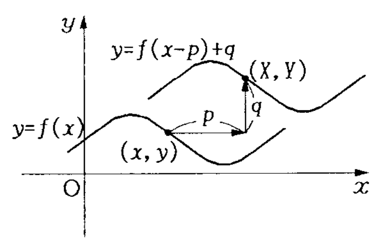
x軸方向にp，y軸方向にq

だけ平行移動すると

点$(x+p,\ y+q)$

になります。

◇ $y=f(x)$のグラフの平行移動



関数$y=f(x)$のグラフをx軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動したグラフを表す関数を求めてみましょう。

$y=f(x)$のグラフ上の1点$(x,\ y)$が点$(X,\ Y)$に移ったとすると

$X=x+p$，$Y=y+q$

すなわち

$x=X-p$，$y=Y-q$

の関係が成り立ちます。x，yは$y=f(x)$を満たしますから，この2式を$y=f(x)$に代入すると，X，Yは

$Y-q=f(X-p)$

を満たします。よって，求める関数は

$y-q=f(x-p)$　　$(y=f(x-p)+q)$

となります。

グラフの平行移動についてまとめると，次のようになります。

グラフの平行移動

> 関数$y=f(x)$のグラフを
>
> x軸方向にp，y軸方向にq
>
> だけ平行移動すると，関数
>
> $y-q=f(x-p)$　すなわち　$y=f(x-p)+q$
>
> のグラフになります。

➔では，例題にはいりましょう。

基本例題 1　　　　グラフの平行移動

ある関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動してできます。この関数を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したので，x に $x-1$，y に $y-(-3)=y+3$ を代入します。

◆ 解　答 ◆

$y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ の x，y に，それぞれ $x-1$，$y+3$ を代入して

$$y+3=\frac{2(x-1)+3}{(x-1)+2}$$

$$y=-\frac{x+2}{x+1}$$

◆ 別　解 ◆

次のように，分数関数のグラフの平行移動の考え方を使っても解けます。

関数 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{x+2}+2$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフは

$$y=\frac{-1}{x+1}-1$$

すなわち　$y=-\dfrac{x+2}{x+1}$

➔いろいろな関数のグラフの平行移動について，トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0048)

次の関数のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 平行移動したグラフの表す関数を求めなさい。

(1) $y=-2x^2+x$　　(2) $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$　　(3) $y=\sqrt{2x-3}-1$

2 (0049)

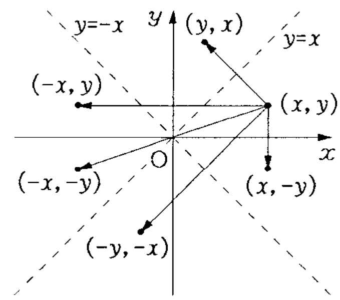
関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを，x 軸方向にどれだけ平行移動すれば点 (2, 2) を通るようにできますか。

➔次に，x 軸や y 軸，原点，$y=x$ や $y=-x$ に関する対称移動を考えてみましょう。

〔2〕グラフの対称移動

◇点の対称移動

座標平面上の点 $(x,\ y)$ を
　x 軸に関して対称に移動すると点 $(x,\ -y)$
　y 軸に関して対称に移動すると点 $(-x,\ y)$
　原点に関して対称に移動すると点 $(-x,\ -y)$
　$y=x$ に関して対称に移動すると点 $(y,\ x)$
　$y=-x$ に関して対称に移動すると点 $(-y,\ -x)$
になります。



◇ $y=f(x)$ のグラフの対称移動

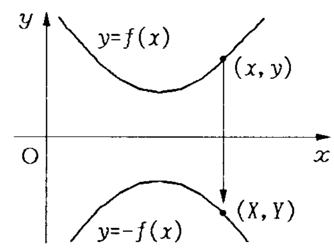
関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸に関して対称に移動したグラフを表す関数を求めてみましょう。

$y=f(x)$ のグラフ上の1点 $(x,\ y)$ が点 $(X,\ Y)$ に移ったとすると

$$X=x,\quad Y=-y$$

すなわち

$$x=X,\quad y=-Y$$



の関係が成り立ちます。x，y は $y=f(x)$ を満たしますから，この2式を $y=f(x)$ に代入すると，X，Y は

$$-Y=f(X)$$

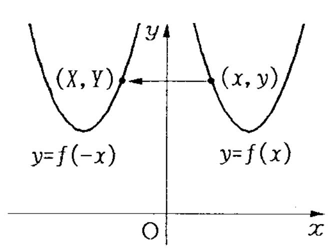
を満たします。よって，求める関数は

$$-y=f(x)\qquad (y=-f(x))$$

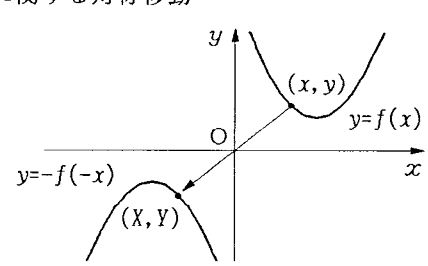
となります。

同じようにして，y 軸，原点，$y=x$，$y=-x$ に関する対称移動は，それぞれ次のようになります。

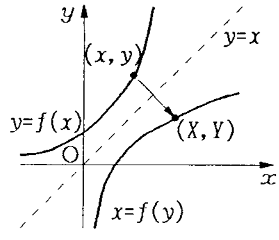
y 軸に関する対称移動



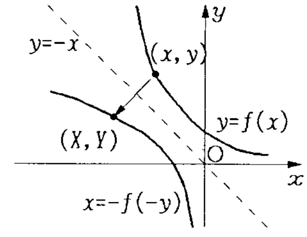
原点に関する対称移動



$y=x$ に関する対称移動



$y=-x$ に関する対称移動



グラフの対称移動についてまとめると，次のようになります。

―― グラフの対称移動 ――

関数 $y=f(x)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動すると，関数 $-y=f(x)$，

すなわち $y=-f(x)$

y 軸に関して対称移動すると，関数 $y=f(-x)$

原点に関して対称移動すると，関数 $-y=f(-x)$，

すなわち $y=-f(-x)$

$y=x$ に関して対称移動すると，関数 $x=f(y)$

$y=-x$ に関して対称移動すると，関数 $-x=f(-y)$，

すなわち $x=-f(-y)$

のグラフになります。

➜それでは，例題に進みましょう。

基本例題2 グラフの対称移動

ある関数のグラフは，関数 $y=\sqrt{x-1}+2$ のグラフを x 軸に関して対称移動してできます。この関数を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

x 軸に関しての対称移動ですから，$y=\sqrt{x-1}+2$ の y に $-y$ を代入します。

◆ 解　答 ◆

$y=\sqrt{x-1}+2$ の y に $-y$ を代入して

$$-y=\sqrt{x-1}+2$$
$$y=-\sqrt{x-1}-2$$

➜グラフの対称移動についてわかりましたね。トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0050)

次の関数のグラフを，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したグラフの表す関数を求めなさい。

(1) $y=-x^2+2x-1$　　(2) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$　　(3) $y=\sqrt{x+2}-1$

4 (0051)

ある関数のグラフは，関数 $y=2x^2+6x-6$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -4 平行移動し，さらに原点に関して対称移動してできます。この関数を求めなさい。

5 (0052)

次の関数のグラフは，$y=2^x$ のグラフをどのように移動させたものか。$\boxed{}$ をうめなさい。

(1) $y=\log_2(x-2)$

直線 $\boxed{}$ に関して対称移動し，$\boxed{}$ 軸の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動。

(2)　$y=\log_2\dfrac{x}{2}$

直線 $\boxed{}$ に関して対称移動し，$\boxed{}$ 軸の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動。

➜最後の問題は，少し考えます。

6　(0053)

2つの2次関数 $y=2x^2+4x+3$，$y=-2x^2+4x+1$ は，ある点に関して対称です。その点の座標を求めなさい。

➜今回の学習は，これで終わりです。ここでは，グラフの平行移動，対称移動について学習しました。

まとめておこう！

関数 $y=f(x)$ のグラフを移動してできるグラフの表す関数は，次のようになります

1. x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動………$y-q=f(x-p)$
2. x 軸に関する対称移動………$-y=f(x)$
3. y 軸に関する対称移動………$y=f(-x)$
4. 原点に関する対称移動………$-y=f(-x)$
5. $y=x$ に関する対称移動………$x=f(y)$
6. $y=-x$ に関する対称移動………$-x=f(-y)$

§6　関数とそのグラフ(2)　偶関数・奇関数など

ここでは，これまで学んできたいろいろな関数のグラフを別の角度からながめ，特別な関数のグラフのかき方について学習します。

➜はじめに，絶対値記号やガウス記号について，確認しておきます。

〔1〕場合分けされる関数のグラフ

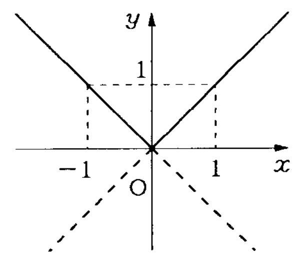
◇関数 $y=|x|$ のグラフ

関数 $y=|x|$ のグラフは，次のように場合分けすればかくことができます。

$x\geqq 0$ のとき　$y=x$

$x<0$ のとき　$y=-x$

よって，関数 $y=|x|$ のグラフは，右の図の実線部分になります。また，この関数の定義域は実数全体，値域は，グラフより，$y\geqq 0$ です。



◇関数 $y=[x]$ のグラフ

記号［　］は，ガウスの記号といって，$[x]$ は，x を越えない最大の整数を表します。（$[x]$ は“ガウス x”と読みます。）たとえば，$[1.5]=1$，$[-2.3]=-3$，$[3]=3$ となります。

関数 $y=[x]$ のグラフは，次のように場合分けすればかくことができます。

…………

$-3\leqq x<-2$ のとき　$y=-3$

$-2\leqq x<-1$ のとき　$y=-2$

$-1\leqq x<0$ のとき　$y=-1$

$0\leqq x<1$ のとき　$y=0$

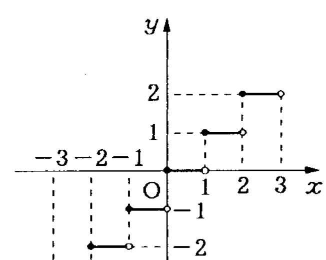
$1\leqq x<2$ のとき　$y=1$

$2\leqq x<3$ のとき　$y=2$

…………

$n\leqq x<n+1$ のとき　$y=n$（n は整数）

…………



よって，関数 $y=[x]$ のグラフは上の図のようになります。また，この関数の定義域は実数全体，値域は整数全体です。

➜ $|x|$ や $[x]$ の定義をしっかり理解して，これらの式で表される関数のグラフをかけるようにしておきましょう。

基本例題 1　　場合分けされる関数のグラフ

次の関数のグラフをかきなさい。また，その関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=2|x-1|$　　　　　　　　　　　　(2)　$y=2[x]-1$

◆解　答◆

(1)　$x \geqq 1$ のとき　　➔ $x-1 \geqq 0$ となるとき

$y=2(x-1)$

$=2x-2$

$x<1$ のとき　　➔ $x-1<0$ となるとき

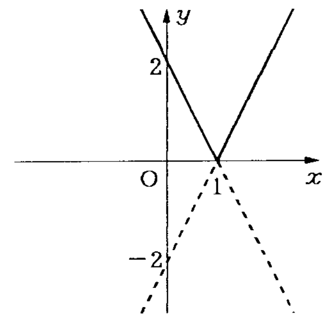
$y=-2(x-1)$

$=-2x+2$

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。

この関数の値域は，グラフより

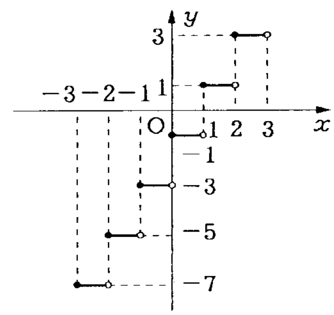
$y \geqq 0$



(2)　…………

$-3 \leqq x<-2$ のとき	$y=-7$
$-2 \leqq x<-1$ のとき	$y=-5$
$-1 \leqq x<0$ のとき	$y=-3$
$0 \leqq x<1$ のとき	$y=-1$
$1 \leqq x<2$ のとき	$y=1$
$2 \leqq x<3$ のとき	$y=3$

…………



よって，この関数のグラフは右の図のようになる。

この関数の値域は，グラフより

奇数全体

➔絶対値記号やガウスの記号をふくむ関数のグラフのかき方はわかりましたね。

■■■トレーニング■■■

1　(0054)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=|2x|-4$　　　　　　　　　　　　(2)　$y=-|x-2|$

2　(0055)

次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。

$y=2|x-2|-2$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$

3　(0056)

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=[x]$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y=-[x+1]$ $(-4<x<1)$

➔次に，偶(ぐう)関数や奇(き)関数とはどういう関数なのか学習しましょう。

〔2〕偶関数・奇関数

◇偶関数

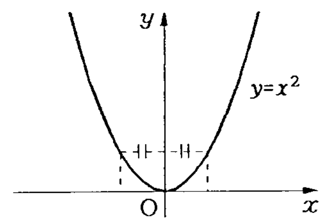
関数 $y=x^2$ のグラフは，右の図のようになります。このグラフは y 軸に関して対称です。

一般に，関数 $y=f(x)$ において

$$f(-x)=f(x)$$

が成り立つとき，この関数を偶関数といいます。

偶関数のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフのように， y 軸に関して対称になります。



◇奇関数

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは，右の図のようになります。このグラフは原点に関して対称です。

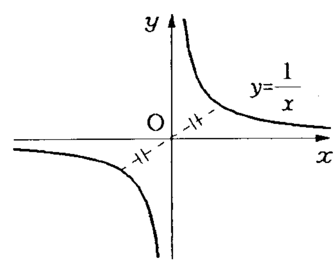
一般に，関数 $y=f(x)$ において

$$f(-x)=-f(x)$$

$$(あるいは\ -f(-x)=f(x))$$

が成り立つとき，この関数を奇関数といいます。

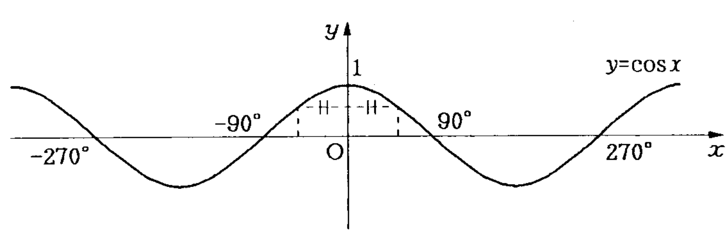
奇関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフのように，原点に関して対称になります。



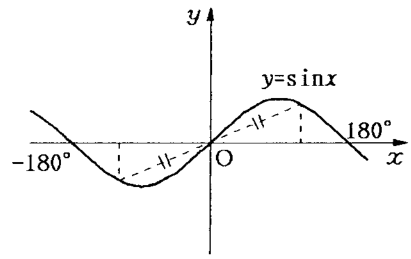
➜偶関数・奇関数とはどのような関数なのかわかりましたね。
次の“ちょっとひとこと”を読んだら，例題に進みましょう。

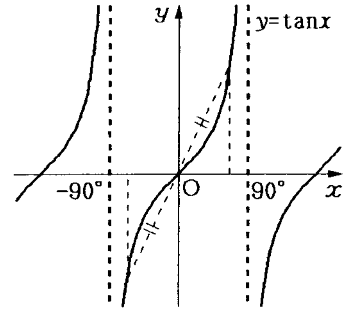
●ちょっとひとこと●

- 三角関数のグラフについて考えてみましょう。
  $y=\cos x$ は，$\cos(-x)=\cos x$ より偶関数であり，グラフは y 軸に関して対称です。



- また，$\sin(-x)=-\sin x$，$\tan(-x)=-\tan x$ より，$y=\sin x$，$y=\tan x$ はともに奇関数であり，そのグラフは原点に関して対称です。





基本例題 2 　　　　　　　　　　　　　　　　　**偶関数・奇関数**

次の関数が偶関数か奇関数かを答えなさい。また,そのことを利用してグラフをかきなさい。

(1)　$y=\dfrac{2}{x}$　　　　　　　　　　(2)　$y=|\,x\,|$

◆ 考え方 ◆

与えられた関数を $y=f(x)$ とおいて

$$f(-x)=f(x),\ \text{あるいは}\ f(-x)=-f(x)$$

が成り立つかどうかを調べます。

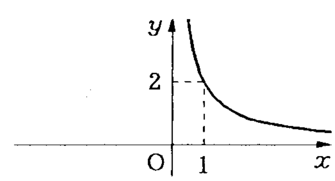
$f(-x)=f(x)$ が成り立つならば偶関数，$f(-x)=-f(x)$ が成り立つならば奇関数です。

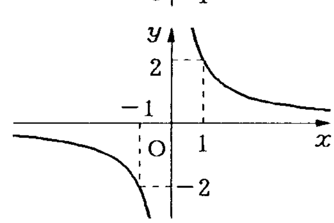
グラフをかくときは，偶関数ならば y 軸に関して，奇関数ならば原点に関して対称になることを利用します。

◆ 解　答 ◆

(1)　$f(x)=\dfrac{2}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(-x)&=\frac{2}{-x}\\ &=-\frac{2}{x}\\ &=-f(x) \end{aligned}$$





よって，この関数は奇関数である。

$x>0$ の範囲で，この関数のグラフは右上の図のようになる。

この関数は奇関数だから，グラフは原点に関して対称になる。

よって，右上の図より，この関数のグラフは右の図のようになる。

➜奇関数のグラフは，原点に関して対称です。

(2)　$f(x)=|x|$ とおくと

$$f(-x)=|-x|$$
$$=|x|$$
$$=f(x)$$

よって，この関数は偶関数である。

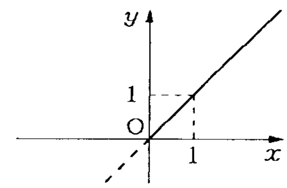
$x \geqq 0$ の範囲で，この関数は

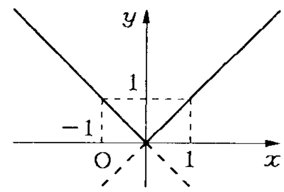
$$y=x$$

だから，グラフは右上の図の実線部分になる。

この関数は偶関数だから，グラフは y 軸に関して対称になる。

よって，右上の図より，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。





➜偶関数のグラフは，y 軸に関して対称です。

〈注意〉　偶関数・奇関数のグラフをかくときには，一般に，$x \geqq 0$ の範囲でグラフをかいて，次に y 軸や原点に関して対称であることを利用して，$x<0$ の範囲でグラフをかきます。

(1)では，はじめに $x>0$ の範囲でグラフをかきましたが，これは，$x=0$ のとき関数 $y=\dfrac{2}{x}$ が定義されないためです。

■■■トレーニング■■■

4　(0057)

次の関数は偶関数ですか。奇関数ですか。

(1)　$y=-3x$　　(2)　$y=x^2+3$

(3)　$y=-\dfrac{1}{x}$　　(4)　$y=\sqrt{|x|+1}$

5　(0058)

次の関数は偶関数か奇関数かを調べて，そのグラフをかきなさい。

(1)　$y=-|x|$　　(2)　$y=x^2-2|x|$

6　(0059)

関数 $y=x^n$（n は整数）は，n が偶数のとき偶関数，n が奇数のとき奇関数であることを示しなさい。

➜次に，2つの関数の和の形で与えられた関数について考えてみましょう。

基本例題3　$y=f(x)+g(x)$ のグラフ

関数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ のグラフをかきなさい。

◆考え方◆

関数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ は，関数 $y=x$ と関数 $y=-\dfrac{1}{x}$ の和と考えられます。

ですから，直線 $y=x$ と直角双曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ をかいて，x の値と，それに対する

y の値の和を座標とする点 $\left(x,\ x+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)$ を結べば，関数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ のグラフがかけます。

◆解　答◆

$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f(-x)=-x-\frac{1}{-x}$$
$$=-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=-f(x)$$

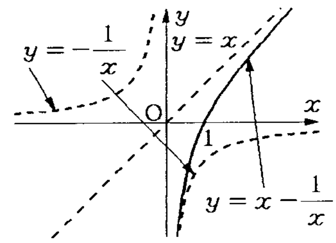
よって，この関数は奇関数である。

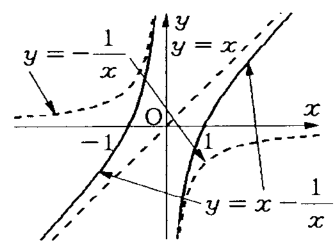
$x>0$ の範囲で，x，y の値は右の表のようになるから，この範囲でのグラフは右上の図の実線部分になる。

この関数は奇関数だから，グラフは原点に関して対称になる。

よって，右上の図より，この関数のグラフは右の図の実線部分になる。

x	$-\dfrac{1}{x}$	$x-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{3}$	-3	$-\dfrac{8}{3}$
$\dfrac{1}{2}$	-2	$-\dfrac{3}{2}$
1	-1	0
2	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}$
3	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{8}{3}$
4	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{15}{4}$





■■■トレーニング■■■

7　(0060)

関数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフをかきなさい。

8　(0061)

関数 $y=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ のグラフをかきなさい。

➔与えられた関数が偶関数であるか，奇関数であるか，また，すでに知っている関数の和で表されるかどうかは，グラフをかくときに重要なことです。最後に，次の問題に挑戦してみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

9＊ (0062)

関数 $y=x+\dfrac{4}{x}$ の値域を求めなさい。

➔今回の学習は，これで終わりです。

まとめておこう！

関数 $y=f(x)$ において

1. $f(-x)=f(x)$ のとき　$y=f(x)$ は偶関数
グラフは y 軸に関して対称

2. $f(-x)=-f(x)$ のとき　$y=f(x)$ は奇関数
グラフは原点に関して対称

§7　弧度法と三角関数

「極限」についての学習にはいるまえに，角の大きさを表す単位について考えてみます。

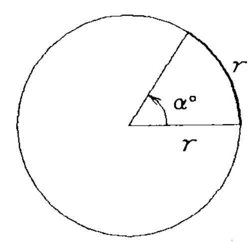
これまで，角の大きさを表すには，直角の $\frac{1}{90}$ を 1°(1度)とし，これを単位とする度数法(60分法)を用いてきました。

数学Ⅲでは，おもに，弧度法を用います。ここでは，弧度法とはどういった表し方であるのか学習していきましょう。

〔1〕弧度法

半径 r の円において，長さ r の弧に対応する中心角 α° の大きさを調べましょう。

弧の長さは中心角に比例するので，円周の長さ $2\pi r$ と円周全体の中心角 360° との比例式をつくれば



$$r : 2\pi r = \alpha : 360$$

ゆえに　$\alpha = 360 \times \dfrac{r}{2\pi r}$

$$= \frac{180}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\fallingdotseq 57.2958$$

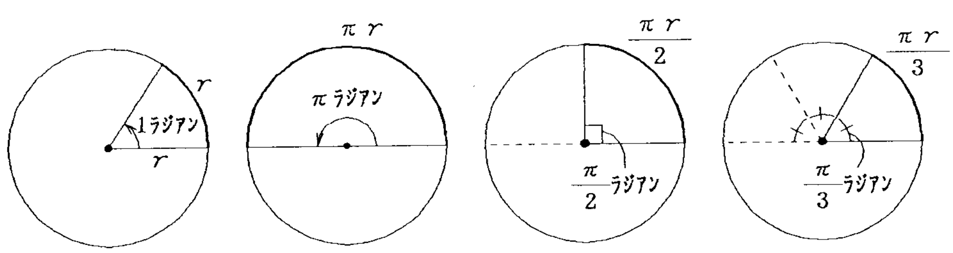
となります。この中心角は，半径の大きさに関係なく一定です。この角の大きさを1ラジアン(1弧度)といい，これを単位として角の大きさを測る方法を弧度法といいます。①より

$$1\text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\pi\text{ ラジアン} = 180^\circ$$

となります。

$1\text{ラジアン} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \longrightarrow \pi\text{ ラジアン} = 180^\circ \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}\text{ラジアン} = 90^\circ \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}\text{ラジアン} = 60^\circ$



以上のことから，角の大きさを表す度と弧度は，次のように対応します。

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

〈注意〉 単位のラジアンは，rad. とも書きます。今までは度数法が中心でしたが，数学Ⅲでは，弧度法が主流となります。弧度法は，単位を省略して，数値だけで表すのが普通です。

➜では，次のトレーニングに進みましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0063)

次の角を度数法（60 分法）で表しなさい。

(1) $\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(3) 2π

(4) $\dfrac{\pi}{6}$　　(5) $-\dfrac{5}{6}\pi$　　(6) $\dfrac{5}{4}\pi$

2 (0064)

次の角を弧度法で表しなさい。

(1) 90°　　(2) -150°　　(3) 225°

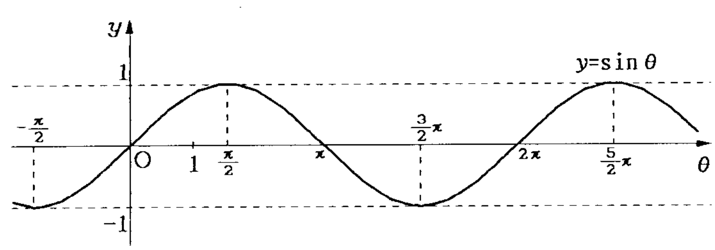
(4) -300°　　(5) 450°　　(6) 900°

3 (0065)

次の三角関数の値を求めなさい。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{6}$　　(3) $\tan\dfrac{\pi}{4}$

➜三角関数 $y=\sin\theta$ のグラフなども，今後は θ をラジアンで考えます。
$\pi=3.14\cdots\cdots$ なので，θ 軸の 1 と y 軸の 1 を同じ長さにとると，グラフは次のようになります。



4 (0066)

次の三角関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\cos\theta$

(2) $y=\tan\theta$

5 (0067)

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，$y=\dfrac{1}{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかきなさい。

6 (0068)

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の式を満たす角 θ を求めなさい。また，θ が一般角のときはどうですか。

(1)　$\cos\theta=\frac{1}{2}$　　(2)　$2\sin\theta=\sqrt{2}$　　(3)　$\tan\theta=-1$

➜次に，弧度法を用いて，おうぎ形の弧の長さと面積を求めてみます。

〔2〕おうぎ形の弧の長さと面積

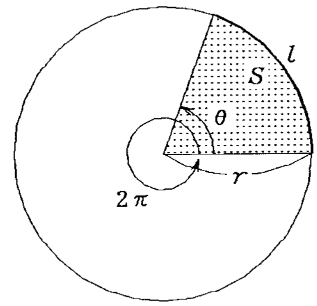
半径 r，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さと面積について考えてみます。おうぎ形の弧の長さ l は，中心角 θ に比例し，円全体では中心角は 2π なので

$$\theta:2\pi=l:2\pi r$$

より

$$l=r\theta$$

となります。



同様にして，おうぎ形の面積 S も，中心角 θ に比例するので

$$\theta:2\pi=S:\pi r^2$$

より

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

となります。また，$l=r\theta$ だから

$$S=\frac{1}{2}rl$$

が成り立ちます。

・ちょっとひとこと・

- 仮に，度数法で，半径 r，中心角 θ° の弧の長さ l を求めると

$$\theta^\circ:360^\circ=l:2\pi r$$

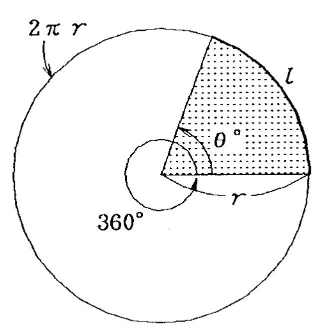
よって　$l=\frac{2\pi r\theta^\circ}{360^\circ}$

すなわち　$l=\frac{\pi}{180^\circ}r\theta^\circ$

弧度法で求めた場合($l=r\theta$)と比べると

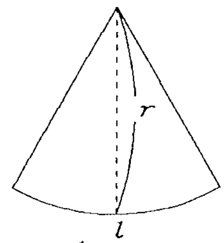
$$\frac{\pi}{180^\circ}$$

という係数が余分につくことがわかります。

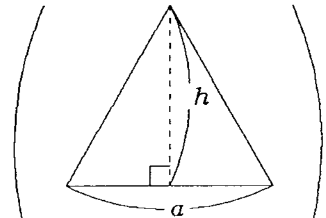


- おうぎ形の面積について

底辺 l，高さ r の三角形とみなして，$S=\frac{1}{2}rl$ と覚える方法があります。



$S=\frac{1}{2}rl$



$\left(S=\frac{1}{2}ah \right)$

➡では，トレーニングをやりましょう。

■■■トレーニング■■■

7　(0069)

半径 8 cm，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ のおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。

8　(0070)

半径の長さと中心角が次の場合のおうぎ形について，弧の長さと面積をそれぞれ求めなさい。

(1)　半径 4 cm，中心角 150°　　(2)　半径 3 cm，中心角 210°

9　(0071)

次の各問いに答えなさい。

(1)　半径が 2 cm，面積が $\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$ のおうぎ形があります。このおうぎ形の中心角と弧の長さを求めなさい。

(2)　中心角が $\frac{\pi}{3}$，面積が $\pi\,\mathrm{cm}^2$ のおうぎ形があります。このおうぎ形の半径と弧の長さを求めなさい。

➡数学Ⅱで学習した三角関数の公式は，弧度法でもそのまま成立します。
ここで確認しておきましょう。

〔3〕三角関数のいろいろな公式

◇三角関数の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

◇三角関数の性質（n は整数，複号同順）

$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\\ \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta \\ \cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta \end{cases}$$

◇ 加法定理（複号同順）

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

◇ 2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

◇ 半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

◇ 積を和(差)になおす公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

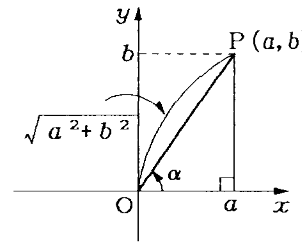
◇ 和(差)を積になおす公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

◇ 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$



➡公式は，ただ暗記するのではなく，自分で図をかいたりして導けるようにしておくことが大切です。ではトレーニング。

■■■トレーニング■■■

10 (0072)

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\tan(\pi+\theta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)\tan(\pi-\theta)$

(2) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

11 (0073)

三角関数の和を積になおす公式を利用して，次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

(2) $\sin x-\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(x-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

(3) $\cos x+\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+x\right)+\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-x\right)$

12 (0074)

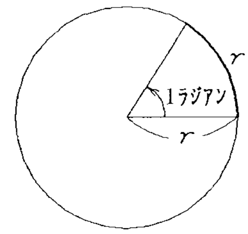
関数 $y=\sin x+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めなさい。

まとめておこう！

1. 円の半径に等しい長さの弧に対する中心角を１ラジアンといいます。

$$1\text{ラジアン}=\frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\pi\text{ラジアン}=180^\circ$$



2. 半径r，中心角θのおうぎ形の弧の長さlと面積Sは次のようになります。

$$l=r\theta$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

§8　数列の極限

これから，「極限」の概念について学習していきます。
はじめにとりあげる内容は，数列の極限についてです。数列については，数学 A で学習しましたね。数列の一般項，等差数列，等比数列などいろいろありました。
ここでは，まず，無限数列とその極限からはじめましょう。

〔1〕数列の極限値

自然数の列 1，2，3，4，5，6，7，……のように，ある規則にしたがって，数が限りなく並んでいるとき，この数の列のことを無限数列（むげんすうれつ）（または，単に数列）といい，その各数のことを項（こう）といいます。項が無限にある（限りなくある）という意味で，無限数列というのです。
無限数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

において，とくに a_1 を初項（しょこう），a_n を第 n 項（だいえぬこう）（または，一般項（いっぱんこう））といい，この無限数列を $\{a_n\}$ という記号で表します。これらは，今までの数列（無限数列に対して，有限数列（ゆうげんすうれつ）ということもあります）の表し方と変わりません。しかし，無限数列には，末項（すなわち，最後の項）はありません。

無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，無限数列 $\{a_n\}$ は α に収束（しゅうそく）するといい，α を無限数列 $\{a_n\}$ の極限値（きょくげんち），あるいは極限といいます。そして，このことを次のように記号で表します。

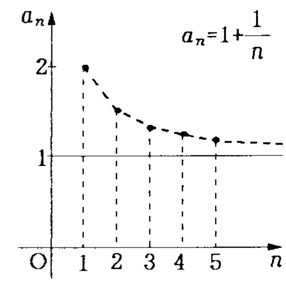
$n\to\infty$ のとき　$a_n\to\alpha$　　あるいは　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

〈注意〉　∞ は「むげんだい」と読み，「限りなく大きくなった状態」を表し，この状態を「無限大」といいます。∞ とは，ある大きな数のことではなく，数が大きくなった状態のことです。
また，$n\to\infty$ とは，「n が限りなく無限大に近づくこと」，すなわち，「n が限りなく大きくなること」を表し，$a_n\to\alpha$ とは，「a_n の値が限りなく α に近づくこと」を表しています。このときの値 α は，ある 1 つの定まった値のことで，数学の用語では「有限の確定した値」といい，∞ と区別しています。

➜極限とか，収束といった難しそうなことばが出てきましたが，驚くことはありません。これからの学習でわかってしまいます。
では，数列が収束するようすを，実際に見てみましょう。

たとえば，無限数列

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$



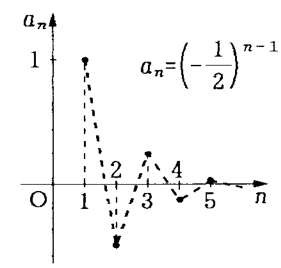
は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，限りなく1に近づいていきます。すなわち，この無限数列は1に収束します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

となります。

また，無限数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots\cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots\cdots$$



は，図からもわかるように，正の値と負の値を交互にとりますが，n が限りなく大きくなると，限りなく0に近づいていきます。すなわち，0に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

です。

〈注意〉　無限数列 $\{a_n\}$ において，すべての項の値が α に等しい場合，すなわち

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \cdots\cdots,\ \alpha,\ \cdots\cdots$$

の場合も，α に収束すると考えます。ですから，記号で

$$\lim_{n\to\infty}\alpha=\alpha$$

と書きます。

➜無限数列が収束するということの意味，極限値の意味がわかりましたね。では，次の例題をしてから，トレーニングへ進みましょう。

基本例題1　　　**数列の極限値**

次の無限数列の極限値を求めなさい。

(1) $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$　　　(2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots\cdots$

(3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$　　　(4) $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2,\ \cdots\cdots$

◆ 考え方 ◆

(1) 一般項が $\frac{2n+1}{n}$ のままでは，この無限数列の極限は形式的に $\frac{\infty}{\infty}$ になってしまいます。ですから，一般項を極限の様子が分かるように変形します。このとき，無限数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ の極限値が0になることをもとに考えます。

(2) $(-1)^{n-1}$ は，正の値1と負の値 -1 を交互にとります。しかし，分母の n が限りなく大きくなると，$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の全体としては，正の値と負の値を交互にとりながら，0に限りなく近づきます。

(3) 分子は定数1で，分母の 2^n は n が限りなく大きくなると限りなく大きくなります。

(4) この無限数列は，どこまでいっても2のままです。このような，すべての項が2の無限数列 $\{2\}$ の場合，極限値は2であるとします。

◆解　答◆

(1)　与えられた無限数列の一般項は，変形すると $\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$ であるから，$n=1$，2，3，4，……とすると

$$2+1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

となり，この数列の各項の整数部分の値はつねに2である。

また，分数部分は，n が限りなく大きくなると，分母が限りなく大きくなるので，0に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$

(2)　与えられた無限数列は，n が限りなく大きくなると，奇数番目の項も偶数番目の項もどちらも0に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$

(3)　与えられた無限数列は，$n=1$，2，3，4，……とすると

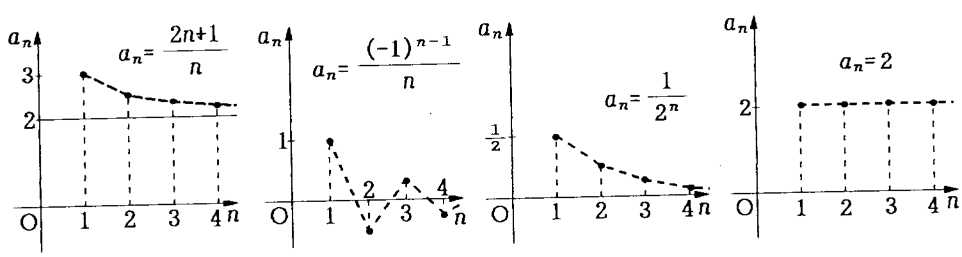
$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

となり，この数列は，n が限りなく大きくなると，分母が限りなく大きくなるので，0に限りなく近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

(4)　与えられた無限数列は，すべての項が2である。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2=2$



◆注　意◆

無限数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ は，無限数列の極限の最も基本の式です。

➜無限数列の極限値の求め方はわかりましたね。n を限りなく大きくしたとき，どんな値に限りなく近づくかを考えるのです。(4)のように，すべての項が2のものの極限値はやはり2となります。

■■■トレーニング■■■

1　(0075)

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1)　1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{7}$，……，$\dfrac{1}{2n-1}$，……

(2) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{3^{n-1}},\ \cdots\cdots$

2 (0076)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{1}{2n}$　　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$　　(3) $\frac{1}{2^{n-1}}$

3 (0077)

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots\cdots$

(2) $\frac{4}{3},\ \frac{10}{6},\ \frac{16}{9},\ \frac{22}{12},\ \cdots\cdots,\ \frac{6n-2}{3n},\ \cdots\cdots$

➜極限値の求め方は難しくありませんね。
次は，収束しない数列のことを考えます。収束しない場合は，なんというのでしょう。

〔2〕数列の発散（$\pm\infty$）

無限数列 $\{a_n\}$，すなわち

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

が収束しないとき，無限数列 $\{a_n\}$ は発散(はっさん)するといいます。

無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n が限りなく大きくなる場合，無限数列 $\{a_n\}$ は正(せい)の無限大に発散する，または，無限数列 $\{a_n\}$ の極限は正の無限大であるといい，記号で次のように表します。

$n\to\infty$ のとき　$a_n\to+\infty$　　あるいは　$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$

〈注意〉　正の無限大を表すとき，「$+\infty$」と書きますが，$+$ の符号を省略して，単に「∞」と書いてもかまいません。

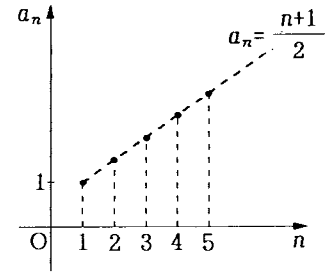
また，無限数列 $\{a_n\}$ において，項の番号 n を限りなく大きくするとき，a_n が負で，その絶対値が限りなく大きくなる場合，無限数列 $\{a_n\}$ は負(ふ)の無限大に発散する，または，無限数列 $\{a_n\}$ の極限は負の無限大であるといい，記号で次のように表します。

$n\to\infty$ のとき　$a_n\to-\infty$　　あるいは　$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

〈注意〉　負の無限大を表すとき，「$-\infty$」と書きますが，このときは，$-$ の符号は省略できません。

たとえば，無限数列

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots\cdots,\ \frac{n+1}{2},\ \cdots\cdots$$



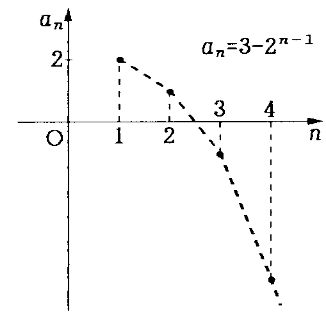
は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，正の無限大に発散します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty$$

となります。

また，無限数列

$$2,\ 1,\ -1,\ -5,\ \cdots\cdots,\ 3-2^{n-1},\ \cdots\cdots$$



は，図からもわかるように，n が限りなく大きくなると，負でその絶対値は限りなく大きくなります。すなわち，負の無限大に発散します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}(3-2^{n-1})=-\infty$$

となります。

➜収束しない場合を発散するということがわかりました。正の無限大を表す $+\infty$ の記号や lim の記号にも慣れましょう。では，例題をしてみましょう。

基本例題 2 　　数列の発散（$\pm\infty$）

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\cdots,\ n^2,\ \cdots\cdots$ 　　(2) $\{-n+1\}$

◆ 考え方 ◆

実際に数列のいくつかの項を書いてみると，わかりやすくなります。

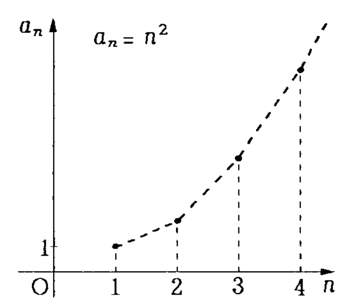
(1)では，1，4，9，16，25，36，……と数がどんどん大きくなります。

(2)では，0，-1，-2，-3，-4，-5，……と負の数でその絶対値がどんどん大きくなります。

◆ 解　答 ◆

(1) 与えられた無限数列において，n を限りなく大きくすると，一般項 n^2 は限りなく大きくなる。

よって　　$\lim_{n\to\infty} n^2=+\infty$

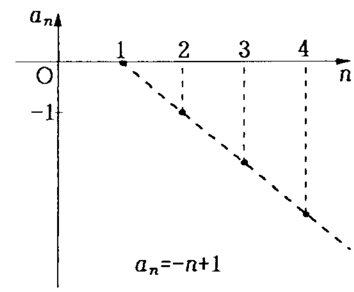


(2) 与えられた無限数列は，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$とすると

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots,\ -n+1,\ \cdots\cdots$$

となり，この数列は，n が限りなく大きくなると，一般項 $-n+1$ は，負でその絶対値は限りなく大きくなる。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-n+1)=-\infty$



◆注　意◆

次のように答えてもかまいません。

(1) 極限は正の無限大。（または，正の無限大に発散する。）

(2) 極限は負の無限大。（または，負の無限大に発散する。）

➜極限が正の無限大である，負の無限大であることがわかりますね。では，次のトレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0078)

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ \cdots\cdots$

(2) $2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ \cdots\cdots$

(3) $3,\ 12,\ 27,\ \cdots\cdots,\ 3n^2,\ \cdots\cdots$

(4) $2,\ 6,\ 12,\ \cdots\cdots,\ n^2+n,\ \cdots\cdots$

5 (0079)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n+1}$　　(2) $\sqrt{3n}$

(3) 2^n　　(4) 3^{n+1}

6 (0080)

次の無限数列の極限を求めなさい。

(1) $4,\ 3,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5-n,\ \cdots\cdots$

(2) $98,\ 97,\ 95,\ \cdots\cdots,\ 99-2^{n-1},\ \cdots\cdots$

➜発散する数列には，正の無限大に発散するもの，負の無限大に発散するもののほかに，振動する数列があります。このことを説明しておきましょう。

〔3〕数列の発散（振動）

無限数列 $\{a_n\}$，すなわち

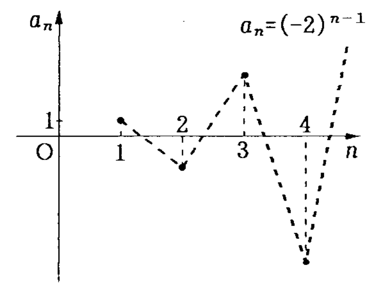
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

が，発散はするけれども正の無限大に発散するのではなく，また，負の無限大に発散するのでもないとき，無限数列 $\{a_n\}$ は振動(しんどう)する，または，無限数列 $\{a_n\}$ の極限はないといいます。

たとえば，無限数列

$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots\cdots$$

を調べてみましょう。この無限数列の各項を図示してみると図のようになります。ですから，図からもわかるように，n が大きくなると，その絶対値は大きくなりますが，正の値と負の値を交互にとります。すなわち，n が限りなく大きくなると，その絶対値は限りなく大きくなりますが，符号が一定しないので，正の無限大に発散するのでも，負の無限大に発散するのでもありません。

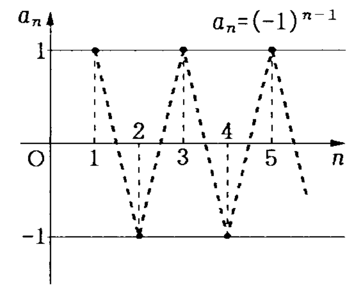


したがって，この無限数列は振動します。

また，無限数列

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots\cdots$$

も同様にして，振動することがわかります。



無限数列 $\{a_n\}$ を，収束するか発散するかで分類すると次のようになります。

数列の収束・発散

$$\text{無限数列}\begin{cases}\text{収束する}\quad \text{極限は有限の確定した値}\cdots\cdots\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \\ \text{発散する}\begin{cases}\text{極限は正の無限大}\cdots\cdots\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \\ \text{極限は負の無限大}\cdots\cdots\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \\ \text{極限はない（振動する）}\end{cases}\end{cases}$$

〈注意〉　「極限はない（振動する）」場合は，発散する場合の１つであることに注意してください。

無限数列 $\{(-2)^{n-1}\}$ を $\lim_{n\to\infty}(-2)^{n-1}=\pm\infty$ とは書きませんし，$\{(-1)^{n-1}\}$ を $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}=\pm1$ とも書きません。振動する無限数列 $\{a_n\}$は

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\cdots\cdots$$

という式では書き表せないのです。

➜数列が振動する，極限はない，という状態をきちんとおさえておいてください。では，例題へ進みます。

基本例題３　　数列の発散（振動）

次の無限数列の収束・発散を調べなさい。

(1)　$\{(-1)^n\}$　　　(2)　$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ (-1)^n n,\ \cdots\cdots$

◆ 考え方 ◆

実際に数列のいくつかの項を書いてみると，わかりやすくなります。

(1)では，$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$と -1 と 1 が交互に現れます。

(2)では，$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \cdots\cdots$と負の数と正の数が交互に現れ，その絶対値

はどんどん大きくなっていきます。

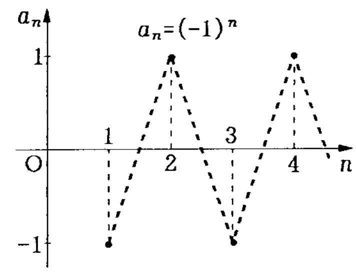
◆解 答◆

(1) 与えられた無限数列は，$n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$とすると

$-1, 1, -1, 1, \cdots\cdots, (-1)^n, \cdots\cdots$

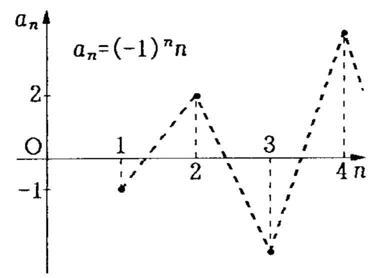
となり，この数列は -1 と 1 が交互に現れる。

よって，この無限数列は振動する。



(2) 与えられた無限数列は，n が限りなく大きくなると，負の数と正の数が交互に現れ，しかもその絶対値は限りなく大きくなる。

よって，この無限数列は振動する。



◆注 意◆

無限数列 $\{(-1)^n\}$ と $\{(-1)^{n-1}\}$ は似ていますが，異なる数列です。

両方とも，1 と -1 が交互に繰り返す点は同じですが，$\{(-1)^n\}$ では偶数番目の項が 1，$\{(-1)^{n-1}\}$ では奇数番目の項が 1 になります。

→各項の値が正と負の値を交互にとって，振動している様子がわかりますね。
一般項が 1 つの値に近づかないとき，極限はないといいます。

■■■トレーニング■■■

7 (0081)

次の無限数列の極限を調べなさい。

(1) $2, -4, 6, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}2n, \cdots\cdots$

(2) $1, -4, 9, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}n^2, \cdots\cdots$

(3) $\sqrt{2}, -2, \sqrt{6}, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}\sqrt{2n}, \cdots\cdots$

(4) $0, -1, \sqrt{2}, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}\sqrt{n-1}, \cdots\cdots$

8 (0082)

次の無限数列の極限を調べなさい。

(1) $\sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi, \sin\frac{3}{2}\pi, \cdots\cdots, \sin\frac{n\pi}{2}, \cdots\cdots$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right), \cdots\cdots, \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{3}\right), \cdots\cdots$

→ここでは，無限数列の収束，発散について学習しました。発散する数列には，振動する数列もありましたね。

まとめておこう！

1. 項が無限にある数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

を無限数列といい，この無限数列を$\{a_n\}$という記号で表します。

2. 無限数列$\{a_n\}$の極限のようすは，次のように分類されます。

無限数列	収束する		$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$	極限がある
	発散する		$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$	極限がある
			$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$	極限がある
			振動する	極限がない

§9　数列の極限の計算(1)

無限数列の収束，発散という意味はわかりましたね。
ここでは，いろいろな無限数列の極限を求める計算を学習します。
はじめに，無限数列が収束するときに成り立つ数列の極限についての公式をとりあげます。

〔1〕収束する数列の極限の計算

無限数列の極限を求めるのに，次の公式がよく利用されます。

収束する数列の極限の計算

2つの無限数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

であるとき，次のことが成り立つ。

[Ⅰ]　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} k a_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$　（k は定数）

[Ⅱ]　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

[Ⅲ]　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

[Ⅳ]　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} a_n b_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

[Ⅴ]　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$）

〈注意〉　極限の計算 [Ⅰ] ～ [Ⅴ] は，2つの無限数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$がともに収束するときのみにいえることです。つまり，どちらか一方が発散したり，両方とも発散するときはこの公式は使えませんから，2つの無限数列が収束していることを確認しなければなりません。
[Ⅴ] の公式で，$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$ とするのは，分母が0の分数は定義されないからです。

➔無限数列の極限の計算の式は，無限数列が収束するときに成り立ちます。では，例題へいきます。

基本例題1　　収束する数列の極限の計算

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1)　$\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n}$　　　(2)　$\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{3^n}\right)$

◆ 考え方 ◆

収束する無限数列の極限では，定数倍・和・差・積・商の極限は，それぞれ極限の定

数倍・和・差・積・商になります。

この公式を使って，与えられた数列の極限値の計算を行います。

◆解　答◆

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$

$=0+0$

$=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3^n}\right)$

$=1\cdot 2$

$=2$

➜わかりましたね。では，例題と同形式の問題をしておきましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0083)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{1}{n}\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)$

➜ここでは，数列が収束している，ということをおさえておくことが大切です。
次は，数列が発散するときの極限の計算です。

〔2〕発散する数列の極限の計算

◇定数倍・和・積

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$

であるとき，次の式が成り立ちます。

［Ⅰ］ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$　➜形式的に $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

［Ⅱ］ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty$　➜形式的に $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

［Ⅲ］ $\begin{cases} k>0 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty}k\,a_n=+\infty & \text{➜形式的に } (+)\times(+\infty)=+\infty \\ k<0 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty}k\,a_n=-\infty & \text{➜形式的に } (-)\times(+\infty)=-\infty \end{cases}$

〈注意〉　［Ⅰ］では，無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の各項の和を項とする新しい無限数列 $\{a_n+b_n\}$，すなわち

$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ a_4+b_4,\ \cdots\cdots,\ a_n+b_n,\ \cdots\cdots$

も，正の無限大に発散することを意味しています。

同様に，［Ⅱ］では，無限数列 $\{a_nb_n\}$，すなわち

$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ \cdots\cdots,\ a_nb_n,\ \cdots\cdots$

も，正の無限大に発散することを意味しています。

たとえば，2つの無限数列 $\{n^2\}$，$\{3n\}$ はいずれも正の無限大に発散しますから

$\lim_{n\to\infty}(n^2+3n)=+\infty$，　$\lim_{n\to\infty}(n^2\cdot 3n)=+\infty$

となります。

また，2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{（有限な確定した値）},\quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

であるとき，次の式が成り立ちます。

[Ⅳ]　$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$　➜形式的に $\alpha + (+\infty) = +\infty$

[Ⅴ]　$\begin{cases} \alpha > 0 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty & \text{➜形式的に} (+)\times(+\infty) = +\infty \\ \alpha < 0 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty & \text{➜形式的に} (-)\times(-\infty) = -\infty \end{cases}$

〈注意〉　ここで $\alpha > 0$ という条件は，α が正であればいいのであって，1でも，$\frac{1}{2}$ でも，$\frac{1}{10^{100}}$ でも，絶対値がどんなに小さい数でも，無限数列 $\{a_n b_n\}$ は正の無限大に発散します。なお，$\alpha = 0$（形式的に $0\times(+\infty)$）の場合は，収束することも発散することもあり，一概にはいえません。

たとえば，2つの無限数列 $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$，$\{n^2\}$ について

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2,\quad \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

ですから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right) + n^2\right\} = +\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\cdot n^2\right\} = +\infty$$

となります。

◇差

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

であるとき，無限数列 $\{a_n - b_n\}$ の極限について考えてみましょう。

収束する数列の極限の計算の公式［Ⅲ］を形式的に適用してみると

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \infty - \infty$$

という形になりますが，これを同じものをひいているからといって，単純に0としては誤りです。

というのは，この差の形の無限数列 $\{a_n - b_n\}$ の極限については，次に示すようにいろいろな場合が起こりうるからです。

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(n - 3n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - 3\right) = -\infty$$

上に示した計算のポイントは，最高次の項でくくり出すというところにあります。

一般に，形式的に極限が $\infty - \infty$ となる無限数列の極限を求めるには，そのままでは求められませんので，極限が求められる形に変形することが必要となります。

◇商

2つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

であるとき，無限数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$の極限について考えてみましょう。

収束する数列の極限の計算での公式［Ⅴ］を形式的に適用してみると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{\infty}{\infty}$$

という形になりますが，これを単純に約分して，1としては誤りです。

というのは，この商の形の無限数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$の極限については，次に示すようにいろいろな場合が起こりうるからです。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

上に示した極限の計算では，分母・分子を n あるいは n^2 で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

が用いられていることを注目してください。

一般に，形式的に極限が$\dfrac{\infty}{\infty}$となる無限数列の極限を求めるには，極限が求められる形に変形することが必要となります。

➔形式的に，$\infty-\infty$，$\infty\div\infty$ となるときは，極限が求められる形に変形しなくてはいけません。では，例題をしてみましょう。

基本例題2　　数列の極限の計算（整式・分数式）

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1)　$2n^2-2n$　　　(2)　$\dfrac{2n+5}{3n}$

◆考え方◆

極限が形式的に，$\infty-\infty$ や$\dfrac{\infty}{\infty}$となる数列は，一般項を極限が求まる形に式変形してから考えます。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ 等が使えるように式変形します。

式変形には，次のような方法があります。

（ｉ）　n の最高次数でくくり出す。

（ii）　分数式では，分母・分子を分母の最高次の項で割る。

◆解　答◆

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-2n)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(2-\dfrac{2}{n}\right)$

ここで，$\lim_{n\to\infty} n^2=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right)=2$ より

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2-2n)=+\infty$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{3}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)=2$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n}=\frac{2}{3}$$

◆注　意◆

形式的に$\infty+\infty=\infty$，$\infty\times\infty=\infty$ は成り立ちますが，$\infty-\infty=0$，$\infty\div\infty=1$ は成り立ちません。

α を正の数とするとき，次の関係が成り立ちます。

$\infty+\alpha=\infty$，$\alpha+\infty=\infty$

$\infty-\alpha=\infty$，$\alpha-\infty=-\infty$

$\infty\times\alpha=\infty$，$\alpha\times\infty=\infty$

$\frac{\infty}{\alpha}=\infty$，$\frac{\alpha}{\infty}=0$

➜説明が長くなりました。それでは，問題を解いていきましょう。

■■■トレーニング■■■

2　(0084)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) n^3-3n^2　　(2) $7n-n^2$

3　(0085)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{5n+1}{3n-1}$　　(2) $\frac{2+3n-4n^2}{5+4n+3n^2}$

(3) $\frac{3n^3}{n^3+n^2}$　　(4) $\frac{n^6+1}{n^3+1}$

➜次に，根号を含む数列の極限について考えてみましょう。

基本例題3　数列の極限の計算（無理式）

次のような一般項をもつ無限数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$　　(2) $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$

◆考え方◆

極限が形式的に$\infty-\infty$ や $\frac{1}{\infty-\infty}$ となる数列は，一般項を極限が求められる形に式変形してから考えます。整式のときのように，n の最高次数でくくりだしてもうまくいかないときは，分母や分子を有理化してみます。

◆解　答◆

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$

$=+\infty$

➜では，次のトレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

4 (0086)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}}$

5 (0087)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\sqrt{n+4}-\sqrt{n}$　　(2) $\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-n}$

6 (0088)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}$

➜ここでは，計算のポイントをしっかりつかんでください。有理化の計算などは，確実にできなくてはいけません。

まとめておこう！

２つの無限数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ であるとき，次のことが成り立ちます。

$\lim_{n\to\infty} k a_n = k\alpha$　（kは定数）

$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\alpha\pm\beta$　（複号同順）

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$）

§ 10　数列の極限の計算(2)

数列の極限を求める計算のつづきです。
ここでは，極限値の大小関係について成り立つ定理を学習します。

〔1〕極限値の大小関係

2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で，対応する項の大きさと極限値の関係を調べてみましょう。
たとえば，無限数列 $\{a_n\}$

$$1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

と無限数列 $\{b_n\}$

$$2+\frac{1}{1},\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ 2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

において，対応する項の大きさを比較してみると

$$1+\frac{1}{1}<2+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2}<2+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3}<2+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n}<2+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

ですから，つねに $a_n<b_n$ となっています。
また，$n\to\infty$ のとき

$$a_n\to 1,\quad b_n\to 2$$

ですから

$$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$$

となっていることがわかります。
一般に，収束する無限数列の大小関係については，次の2つの定理が成り立ちます。

項の大小と極限値の関係

［Ⅰ］　2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$$

であるとき

$$a_n\leqq b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ ならば\quad \alpha\leqq\beta$$

［Ⅱ］　3つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$

であるとき

$$a_n\leqq b_n\leqq c_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ ならば$$

$\{b_n\}$ も収束して　$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

定理［Ⅰ］において，等号をはずした不等式

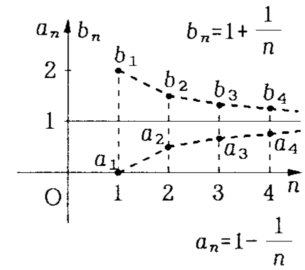
$$a_n<b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ ならば\quad \alpha<\beta$$

であるとは，必ずしもいえません。

たとえば，$a_n=1-\dfrac{1}{n}$，$b_n=1+\dfrac{1}{n}$ とすると，$a_n<b_n$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ ですが

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad \beta=\lim_{n\to\infty}b_n=1$$

となり，$\alpha<\beta$ は成り立たず，$\alpha=\beta$ となっています。



定理［Ⅱ］は，無限数列 $\{b_n\}$ の極限が直接には求めにくいとき，同じ値に収束する２つの無限数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ を使って，はさみうちの形で数列 $\{b_n\}$ の極限を求められるというものです。この意味で，定理［Ⅱ］を「はさみうちの定理」ということもあります。

■■■トレーニング■■■

1 (0089)

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項が次のように表されるとき，a_n と b_n の大小関係を調べ，さらに $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ を求めなさい。

(1) $a_n=1-\dfrac{1}{2n}$，$b_n=1+\dfrac{1}{2n}$　　(2) $a_n=3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n=3-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

➜次の例題で，実際に極限値の大小関係を使って解いている例を見てみることにしましょう。

基本例題１　　極限値の大小関係(1)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}$ を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{6}}{n}$ で，$\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$，$-1\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq 1$ ですから，求める極限値は０になりそうです。しかし，このままでは予想ですから，きちんといえていません。

そこで，収束する無限数列の極限値の関係

$$a_n\leqq c_n\leqq b_n,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\ \text{ならば，}\ \lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$

を利用します。そのためには，まず $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}$ を，n を含む不等式で表すことから考えます。

◆ 解　答 ◆

任意の自然数 n について

$$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{6}\leqq 1$$

であるから

$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}\leqq\frac{1}{n}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}=0$$

➜収束する極限値の関係で，はさみうちの形で極限値を求めていることがわかりますね。では，問題を解いてみることにします。

■■■トレーニング■■■

2 (0090)

数列 $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{6}\right\}$ の極限を求めなさい。

3 (0091)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{1}{n}\sin^2 n\theta$ (2) $\frac{(-1)^n}{n^2}$

➜もう 1 つ例題を考えてみましょう。

例題 1 極限値の大小関係(2)

一般項 $a_n=\frac{n}{2^n}$ の無限数列 $\{a_n\}$ に対して，$n\geqq 2$ のとき $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\frac{3}{4}$ であることを示しなさい。また，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であることを示しなさい。

◆ 考え方 ◆

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を，$a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$，$a_n=\frac{n}{2^n}$ より n の式で表してから，$\frac{3}{4}$ と比較します。

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\frac{3}{4}$ が示せれば，この式より $\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqq\frac{3}{4}$ ですから，$a_n\leqq\frac{3}{4}a_{n-1}$ が導けます。

次に，この式 $a_n\leqq\frac{3}{4}a_{n-1}$ を利用して，a_{n-1} と a_{n-2} を比べ，その次に a_{n-2} と a_{n-3} を比べ，……というように以下繰り返し，a_n と a_2 を比べた式を導き，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を考えます。

◆ 解 答 ◆

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}$$

$$=\frac{n+1}{2n}$$

$n\geqq 2$ のとき $\frac{3}{4}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}-\frac{n+1}{2n}$

$$=\frac{n-2}{4n}\geqq 0$$

よって　$\dfrac{3}{4}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqq 0$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\dfrac{3}{4}$

次に，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\dfrac{3}{4}$ より，$a_{n+1}\leqq\dfrac{3}{4}a_n$ であるから

$$a_n\leqq\frac{3}{4}a_{n-1},\quad a_{n-1}\leqq\frac{3}{4}a_{n-2},\quad a_{n-2}\leqq\frac{3}{4}a_{n-3},\quad \cdots\cdots,\quad a_4\leqq\frac{3}{4}a_3,\quad a_3\leqq\frac{3}{4}a_2$$

これより

$$\begin{aligned} a_n &\leqq \frac{3}{4}a_{n-1} \\ &\leqq \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}a_{n-2} \\ &\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}a_{n-3} \\ &\cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\cdot\frac{3}{4}a_3 \\ &\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\cdot\frac{3}{4}a_2 \end{aligned}$$

ゆえに，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}a_2 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot\frac{2}{2^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

一方　$a_n=\dfrac{n}{2^n}>0$

すなわち，$0<a_n\leqq\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$ で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}0=0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

➜次のトレーニングは，n 乗の形を階乗の形と比較したり，階乗を n 乗の形と比較するというようなくふうをして解くものです。

■■■トレーニング■■■

4＊ (0092)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{n!}{n^{n+1}}$　　(2) $\dfrac{3^n}{n!}$

➜少し難しかったですが，問題を解いていくうちに解法が身についてきますから，がんばって続けましょう。次の問題にも挑戦してください。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0093)

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

6 ＊ (0094)

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}\}$

まとめておこう！

1. 2つの無限数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$であるとき

$a_n\leqq b_n$ならば　$\alpha\leqq\beta$

2. 3つの無限数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$において

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$であるとき

$a_n\leqq b_n\leqq c_n$ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

§ 11　数列 $\{r^n\}$ の極限

数学 A の数列で等比数列というものを学習しましたね。ここでは，等比数列を含む数列の極限を考えてみることにします。

まず，はじめに，無限等比数列の意味と，その極限がどのようになるかからはじめることにしましょう。

〔1〕無限等比数列の極限

無限数列

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \cdots\cdots,\ r^n,\ \cdots\cdots$$

のように，一般項が r^n の形で表されるとき，この数列を無限等比(とうひ)数列といい，r を公比(こうひ)といいます。

では，この無限等比数列の極限を調べてみましょう。この無限等比数列の公比 r にいろいろな値を代入して，それぞれの極限を調べてみると次のようになります。

(i)　$r=0.1$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$0.1,\ (0.1)^2,\ (0.1)^3,\ (0.1)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \cdots\cdots$$

となり，0 に収束します。

(ii)　$r=-0.1$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$-0.1,\ (-0.1)^2,\ (-0.1)^3,\ (-0.1)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$-0.1,\ 0.01,\ -0.001,\ 0.0001,\ \cdots\cdots$$

となり，0 に収束します。

(iii)　$r=10$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots\cdots$$

となり，正の無限大に発散します。

(iv)　$r=-10$ のとき，$\{r^n\}$ は

$$-10,\ (-10)^2,\ (-10)^3,\ (-10)^4,\ \cdots\cdots$$

ですから，これは

$$-10,\ 100,\ -1000,\ 10000,\ \cdots\cdots$$

となり，振動します。

このように，無限等比数列の極限は公比 r の値に応じていろいろに変わります。

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになります。

無限等比数列の極限

［I］　無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$

$r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$r \leqq -1$ のとき　　極限はない（振動する）

［II］　無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束する条件

$\{r^n\}$ が収束するための条件は　　$-1 < r \leqq 1$

定理［I］を証明しておきます。

(1)　$r>1$ のとき，$r=1+h$ $(h>0)$ とおくと，$n \geqq 2$ ならば，二項定理によって

$$\begin{aligned} r^n &= (1+h)^n \\ &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n \\ &> 1+nh \end{aligned}$$

$h>0$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$

ゆえに　　$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$

(2)　$r=1$ のとき，すべての n について $r^n=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} r^n=1$$

(3)　$|r|<1$ のとき，$r=0$ ならば，すべての n について $r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0$$

また，$r \neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{|r|}>1$ であるから，(1)により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=+\infty$$

よって　　$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$

ゆえに　　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(4)　$r=-1$ のとき，-1，1，-1，1，……となり，数列 $\{r^n\}$ は振動する。

(5)　$r<-1$ のとき，(1)により，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=+\infty$ であるが，各項の符号は交互に変わるので，数列 $\{r^n\}$ は振動する。

➜無限等比数列の極限では，公比 r の値によって収束，発散が決まってくることがポイントです。次の例題で，具体的な無限等比数列の収束，発散を調べましょう。

基本例題 1　　　　無限等比数列の極限

次のような一般項をもつ無限数列の極限を調べなさい。

(1)　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　　　(2)　$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

◆ 考え方 ◆

一般項が $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ の無限数列は，無限等比数列です。また，無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べるときは，$r>1$，$r=1$，$|r|<1$，$r \leqq -1$ の場合に分けて考えます。

ですから，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ の極限を調べるには，$\dfrac{3}{2}$ と $-\dfrac{3}{4}$ のそれぞれを 1，-1 と比較します。

◆解　答◆

(1)　$\dfrac{3}{2}>1$ であるから，無限等比数列 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ は正の無限大に発散する。

(2)　$\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから，無限等比数列 $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ は収束し，その極限値は

0

◆注　意◆

無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束・発散を調べるには，r を $1, -1$ と比較しますが，$r=1$，$r=-1$ のときは注意してください。

$r=1$ のときは収束し，その極限値は　1

$r=-1$ のときは振動します(極限はなし)。

➜例題は，わかりましたね。無限等比数列では，収束する条件がとくに大切です。
$r=-1$ のときは振動しますから，注意してください。
では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

1　(0095)

次のような一般項をもつ無限数列の収束，発散を調べ，収束するときは，その極限を求めなさい。

(1)　$\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}$　　(2)　$\dfrac{(\sqrt{5})^n}{2^n}$

(3)　$1-(-1)^n$　　(4)　$(-3)^n$

2　(0096)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1)　$3\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$　　(2)　$(-2)\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

3　(0097)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1)　5^n-4^n　　(2)　$2^{3n}-3^{2n}$

4　(0098)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

(1)　$\dfrac{3^n-2^n}{5^n-1}$　　(2)　$\dfrac{1+(0.3)^n}{(-0.5)^n}$

➜次は，無限等比数列が収束するための条件を使った例題をしてみましょう。

基本例題 2　　無限等比数列が収束する条件

無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right\}$ が収束するような実数 x の値の範囲を定めなさい。また，そのときの極限を求めなさい。

◆考え方◆

無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するのは，$r=1$ か $|r|<1$ のときで，その極限は

$r=1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

です。

ですから，与えられた無限等比数列 $\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n\right\}$ で $r=\frac{1}{x}$ と考えて，$\frac{1}{x}$ の値で場合分けして考えます。

◆解　答◆

無限等比数列 $\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n\right\}$ が収束するのは，$\frac{1}{x}=1$，$\left|\frac{1}{x}\right|<1$ のときである。

(i)　$\frac{1}{x}=1$，すなわち，$x=1$ のとき収束し，その極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=1$$

(ii)　$\left|\frac{1}{x}\right|<1$，すなわち，$|x|>1$ のとき収束し，その極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$$

➜わかりましたね。では，トレーニングで確かめておきましょう。

■■■トレーニング■■■

5　(0099)

数列 $\left\{\left(\frac{x^3}{4+x^2}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

6　(0100)

数列 $\left\{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を定め，そのときのその数列の極限を求めなさい。

➜次に，無限等比数列に関連した例題で，無限等比数列の形が式の中にはいっているものをとりあげましょう。

例題 1　　無限等比数列を含む数列の極限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}$ を求めなさい。ただし，$r\neq-1$ とします。

◆考え方◆

まず，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ を考えます。$\{r^n\}$ は無限等比数列ですから，$r>1$，$r=1$，$|r|<1$，$r<-1$ に場合分けして考えます。

次に，それぞれの r^n に対して，$\frac{1}{1+r^n}$ がどうなるか調べます。

◆解　答◆

(i)　$r>1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=+\infty$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=0$

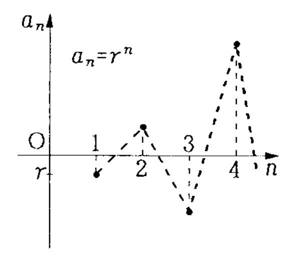
(ii)　$r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=\frac{1}{2}$

(iii)　$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=1$

(iv)　$r<-1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=+\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=0$

◆注　意◆

$r<-1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は負の値と正の値を交互にとり，その絶対値は次第に大きくなります。すなわち，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散します。



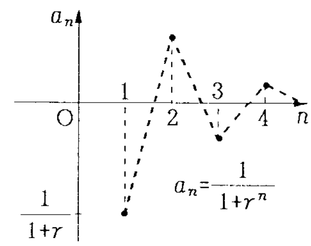
しかし，考えている極限は，無限数列 $\left\{\frac{1}{1+r^n}\right\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}$ ですから，これは分母に r^n があり

$$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty,\ \lim_{n\to\infty} r^n=-\infty$$

で，いずれのときも極限としては

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+r^n}=0$$

となります。



➜このような問題も，無限等比数列の極限を考えればできてしまいます。では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0101)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

$$a_n=\frac{r^n}{1+r^n},\quad r\neq-1$$

8 ＊ (0102)

次のような一般項をもつ数列の極限を求めなさい。

$$a_n=\frac{r^n}{2+r^n},\quad r\neq-1$$

9 ＊ (0103)

極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}$ を次の場合に分けて考えなさい。

(1)　$|a|<1$　　(2)　$|a|>1$

(3)　$a=1$　　(4)　$a=-1$

➜(4)の場合，答え方に注意してください。

最後に，漸化式で定められる無限等比数列の極限を考えてみることにします。数列の漸化式のことを覚えていますね。例題をやってみましょう。

例題2　漸化式で定められる無限等比数列の極限

$a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定義される無限数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

◆考え方◆

数列 $\{a_n\}$ の極限を求めるとき，一般項 a_n を n の式で表します。

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ の式変形は，$a_{n+1}+\alpha=\frac{1}{2}(a_n+\alpha)$ となるとして α を定めます。

$a_{n+1}+\alpha=\frac{1}{2}(a_n+\alpha)$ より　　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{\alpha}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ と比較して　　$-\frac{\alpha}{2}=1$

ゆえに　　$\alpha=-2$

よって　　$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

◆解　答◆

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ を式変形して　　$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

ここで，$b_n=a_n-2$ とおくと　　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

これは，数列 $\{b_n\}$ が初項 $b_1=a_1-2=3-2=1$，公比 $r=\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示している。

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

これより，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ である。

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}$$
$$=2$$

◆注　意◆

仮に $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在したとして，次のように考えることもできます。

$\lim_{n\to\infty}a_n=k$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=k$$

したがって，与式で $n\to\infty$ とすることにより，$k=\frac{1}{2}k+1$ が満たされなければなりません。

これを解くと　　$k=2$

よって，極限値があるとすれば2しかありません。

そこで，$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$ を示します。

$b_n=a_n-2$ とおいて与式を変形すると

$$b_{n+1}+2=\frac{1}{2}(b_n+2)+1$$

よって，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ となります。

これより，$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ を示します。

➜この例題は，漸化式によって，まず数列の一般項を求め，そして極限を考える問題です。漸化式から一般項を求めるところを思い出してください。

■■■トレーニング■■■

10 *(0104)

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1) $a_1=10,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n\quad(n\geqq1)$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{5}a_n-3\quad(n\geqq1)$

11 *(0105)

$a_1=-2,\ 7a_{n+1}-5a_n+2=0\ (n\geqq1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

➜次に応用問題がありますよ。がんばってみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

12 *(0106)

$a_1=3,\ \dfrac{a_{n+1}}{3}=\dfrac{a_n}{2-a_n}\ (n\geqq1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

13 *(0107)

$a_1=-3,\ a_2=-2,\ a_{n+2}=\dfrac{7a_{n+1}-3a_n}{4}\ (n\geqq1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

まとめておこう！

1. 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は，次のようになります。

$$\begin{cases} r>1 \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty} r^n=+\infty \\ r=1 \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty} r^n=1 \\ |r|<1 \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty} r^n=0 \\ r\leqq-1 \text{ のとき} & \text{極限はない（振動する）} \end{cases}$$

2. 無限等比数列 $\{r^n\}$ が収束するための条件は

$-1<r\leqq1$

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

高校数学／数学 III