TRAINING PAPER

DAILY® PROGRAM

高校数学
数学Ⅱ(見本) 1

図形と方程式　目次

KYOIKUSHA

TRAINING PAPER®

高校数学　数学Ⅱ

効果的な使い方

〈1セクションの構成〉

● 1セクション(§1，§2など)の学習は，次のようになっています。
これが，ほぼ1日の学習に相当します。

学習内容の説明

新しい学習内容をわかりやすく説明してあります。また，定理や公式を簡潔にまとめています。

➡よく読んで，しっかりと理解しよう

⇩

基本例題・例題

定理や公式がどのように使われるかを具体的に示してあります。基本例題は基本的な問題，例題は標準的な問題です。

➡考え方や解答のポイントをおさえよう

⇩

トレーニング

例題をふまえて，実際に問題を解く練習です。やさしい問題からむずかしい問題へ，ステップをふんで作られています。

問題番号に ＊がついているのは標準問題，無印は基本問題です。

(ここまでが1セクションに2～3回程度くり返されます。)

⇩

最後に，「もっと力をつけよう」がはいっていることがあります。ここでは，総合問題や，やや程度の高い問題を扱います。

解　　答

巻末に《解答》とくわしい解き方を書いた《詳解》がついています。問題番号の右の4桁数字は，《問題》，《解答》，《詳解》で共通です。答え合わせのとき活用してください。

➡答え合わせも学習のうち，1問1問しっかりと

〈効果的な使い方〉

❖ 授業の進度に合わせて学習していこう

学習内容は，標準的な授業進度に合わせて配列されていますから，復習用としておおいに役立ててください。また，新しい学習内容でもていねいな説明がついていますから，予習用，自学自習用として利用することもできます。

時間に余裕のない場合は，よくわからないところにしぼって，重点的に学習しましょう。

❖ 自分なりに使い方を工夫しよう

本文は表の部分のみ印刷してあります。1ページを完全にやり終えたら，はがしてしまうこともできます。裏の部分は解答を書き込んだり，補足を書き込んだりして自由に使ってください。自分なりに使い方を工夫しましょう。

❖ 定期試験の前には，弱点の部分を重点的に復習しよう

ふだんの学習でまちがえたところをチェックし，その問題を全部もう一度解きます。

§0　はじめに

◇図形と方程式を結びつける

「図形と方程式」というタイトルを見て，最初違和感を持った人がいると思います。

いままでは，図形というのは，幾何の法則を使っていろいろな性質を考えたわけです。また，方程式というのは，未知な値を代数の法則を使って解くためのものでした。

しかし，この全く異なった，「図形」と「方程式」という2つの考え方を結びつけることによって，新しい数学の考え方を示すことができるのです。それが，ここで学習する内容で，詳しくは『解析幾何学』と呼ばれているものです。

『解析幾何学』は，フランスの哲学者であり数学者であった，デカルト（1596 ～ 1650）によって最初に提示されたものです。この功績のため，デカルトは，今でも現代の数学を築いた1人として，大きな位置をおさめているのです。

◇座標を使う

さて，ではこの『解析幾何学』とはどういうものなのか，どうやって，「図形」と「方程式」を結びつけているかといいますと………

ここで登場するのが，関数を学習するときに使用した“座標”です。

まず座標を使って，点を平面上に示してみましょう。

平面上の点の位置は，2本の数直線を両方の原点で直行させたものを使って，次のように表します。

まず，2本の数直線の一方を x 軸，他方を y 軸とします。

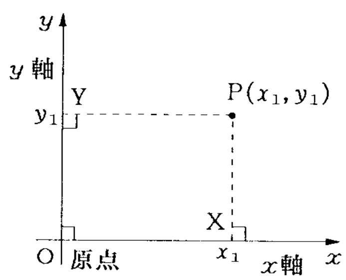
次に，平面上の点 P から，x 軸，y 軸にそれぞれ垂直な直線をひき，x 軸，y 軸との交点を X，Y とします。

X の座標が x_1，Y の座標が y_1 のとき，実数の組 (x_1, y_1) が P の位置を表し，P を $P(x_1, y_1)$ とも表します。

この (x_1, y_1) を P の座標といい，x_1 を P の x 座標，y_1 を P の y 座標といいます。

また，座標のきめられた平面が座標平面です。

この方法で，あらゆる点，および点どうしの関係を平面上に示せるわけです。



では，次にこれを方程式に広げて考えてみましょう。

◇方程式を座標平面に示す

方程式というのは，式にあてはまる実数 x と y の組の集合を示すものです。

たとえば

$$x + y = 1$$

という方程式は，いろいろな実数の組 (x, y) があてはまります。

$$(x,\ y) = (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (2,\ -1),\ \cdots$$

などなど，無限に考えることができますね。

これらの表す点を，座標平面上に取ってみましょう。すると…

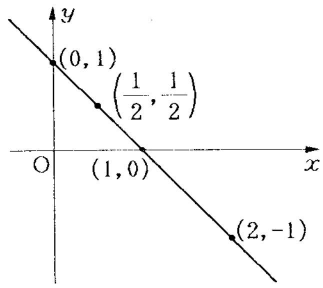
右の図を見てください。
一本の直線上に並んでいることがわかりますね。
つまり

$$x+y=1$$

という方程式にあてはまる実数 x と y の組は，すべて図の直線上にあるし，逆に，図の直線上のすべての点は

$$x+y=1$$

という関係が成り立つわけです。
それで，図の直線が，方程式 $x+y=1$ の表す図形ということになるのです。



◇いろいろな方程式の表す図形を考える

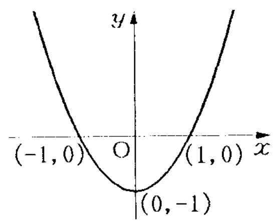
方程式 $x+y=1$ は，よくよく考えてみると，$y=-x+1$ となり1次関数ですね。
また，方程式

$$x^2-y=1$$

の表す図形はというと，これも

$$y=x^2-1$$

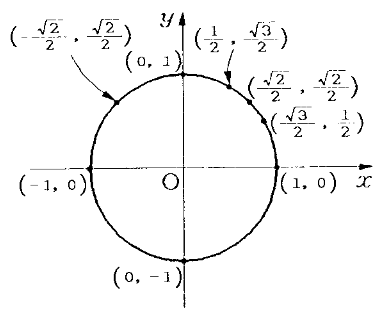
となり2次関数ですから，放物線になります。



では，次のような方程式はどうでしょう。

$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

1次関数でも，2次関数でもない。いままでのやり方は，うまくいかないので，先ほどと同じように，①の関係を満たす点 $(x,\ y)$ を，座標平面上に表してみましょう。
右の図のようになりましたね。
なんとなく，中心が原点で，半径1の円のようですね。
これが，①の表す図形のようですが，本当はどうかは，これから学習していけばわかります。



◇「図形と方程式」を学ぶ意義

いままでは，図形の性質を考えるとき，さまざまな特殊なくふうが必要でした。（補助線を引く，合同な形をみつけるなど…）
しかし，図形を座標にのせ，代数的な方法で図形の性質を考えることで，より一般的，普遍的な研究方法が確立したわけです。
その結果，後で皆さんも学習する「微分法」や「積分法」も考えだされ，現代の科学に大きな影響をもたらしたのです。
数学Ⅱの最初に，「図形と方程式」を学習するのは，とても意味のあることなのです。ぜひ，がんばって取り組んでいきましょう。

§1　2点間の距離

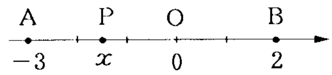
これまでは，図形の問題を解くには，たとえば三角形の合同や相似などの図形の性質を使いましたね。ここは少し考え方を変えて，図形の問題を数や式で表して，その計算で解いてみます。まず，今回は，図形の基礎である点の位置や線分の長さを数や式で表してみましょう。

➜では，直線上の点の位置や線分の長さから考えましょう。

〔1〕直線上の点の位置と2点間の距離

◇直線上の点の座標

右の図で，点 A には -3, 点 B には 2 が対応しています。



このように，数直線上の各点 P には，原点 O からの長さに比例し，O より右側のときは +，左側のときは − としてきめた実数が 1 つずつ対応していることを，前に学習しましたね。

点 P に対応する実数が x であるとき，x を P の座標といいます。

上の点 A の座標は -3，点 B の座標は 2 ですね。

座標が−3である点AをA(−3)のように表します。

◇直線上で，-3，2 を座標にもつ 2 点 A，B 間の距離

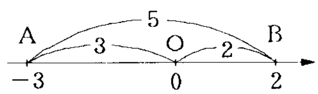
2点 A，B 間の距離とは，線分 AB の長さのことで，記号で AB と表します。

上の2点 A，B は，O を原点とする数直線上で，それぞれ

A は O の左側にあって O から 3 の長さ

B は O の右側にあって O から 2 の長さ

にある点です。



だから，A，B 間の距離 $AB=2+3=5$ です。

ところで，これを，A，B の座標を使って表すと

$AB=2+3=2-(-3)$　　➜大きいほうの座標 − 小さいほうの座標

となっています。

◇直線上の 2 点間の距離

上で調べたように，直線上の 2 点間の距離は

大きいほうの座標 − 小さいほうの座標

ですから，A の座標を a，B の座標を b とすると

$b \geqq a$ のとき　　$AB=b-a$

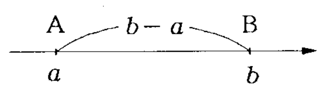
$b < a$ のとき　　$AB=a-b=-(b-a)$

です。これらは，絶対値記号を使うと

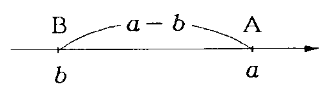
$AB=|b-a|$

と，場合分けしない 1 つの式で表すことができます。

$b \geqq a$ のとき



$b < a$ のとき



→直線上の2点間の距離についてはわかりましたね。さっそく，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0001)

数直線上に，次の座標をもつ2点があります。この2点間の距離を求めなさい。

(1) 6，8　　(2) -3，7

(3) 5，11　　(4) -7，-9

2 (0002)

数直線上に，次の座標をもつ2点があります。この2点間の距離を求めなさい。

(1) 1，$x+2$　　(2) $a+5$，$a-7$

→では，次に，平面上の点の位置と2点間の距離について考えましょう。

〔2〕平面上の点の位置と2点間の距離

◇平面上の点の座標

平面上の点の位置は，2本の数直線を両方の原点で直交させたものを使って，次のように表します。

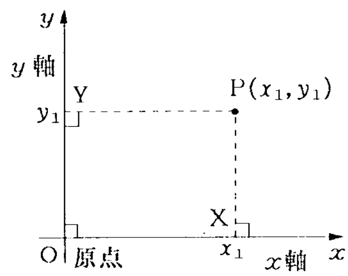
まず，2本の数直線の一方を x 軸，他方を y 軸とします。

次に，平面上の点Pから，x 軸，y 軸にそれぞれ垂直な直線をひき，x 軸，y 軸との交点をX，Yとします。

Xの座標が x_1，Yの座標が y_1 のとき，実数の組 $(x_1,\ y_1)$ がPの位置を表し，Pを $P(x_1,\ y_1)$ とも表します。

この $(x_1,\ y_1)$ をPの座標といい，x_1 をPの x 座標，y_1 をPの y 座標といいます。

また，座標のきめられた平面が座標平面です。



→座標平面上の各点には，実数の組が1つずつ対応します。

◇2点 $A(-3,\ 1)$，$B(2,\ 4)$ 間の距離

平面上の座標の意味からわかるように，2点 $A(-3,\ 1)$，$B(2,\ 4)$ を考えると

Bは，Aから右へ $|2-(-3)|=|5|=5$　→ $|x$ 座標の差$|$

そこからさらに上へ $|4-1|=|3|=3$　→ $|y$ 座標の差$|$

の距離にある点です。

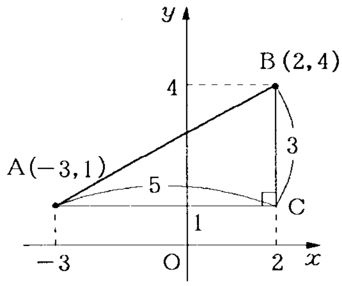
ところで，∠C が直角である直角三角形 ABC では，三平方の定理から

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

です。そして，$AB \geqq 0$ ですから，次のようになります。

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2} \quad \cdots\cdots①$$

だから，上の A(−3, 1)，B(2, 4) から，右の図のような直角三角形 ABC をつくって，①にあてはめると



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{5^2+3^2} \\ &= \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

このように，平面上の2点 A，B 間の距離は，A から y 軸に垂直な直線をひき，B から x 軸に垂直な直線をひいて直角三角形をつくると，三平方の定理を使って求められます。

➜では，実際に三平方の定理を使って，2点間の距離を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0003)

次の2点間の距離を，三平方の定理を使って求めなさい。

(1) A(−2, −1)，B(1, 3)　　(2) C(−5, 2)，D(−1, −4)

4 (0004)

次の2点間の距離を，三平方の定理を使って求めなさい。

(1) O(0, 0)，A(−3, 4)　　(2) O(0, 0)，B(−2, −5)

➜三平方の定理を使えば，平面上の2点間の距離が求められることはわかりましたね。でも，いつもこのように，三平方の定理にもどって考えるのはたいへんです。ここで，平面上の2点間の距離を，その座標を使って表し，公式としてまとめましょう。

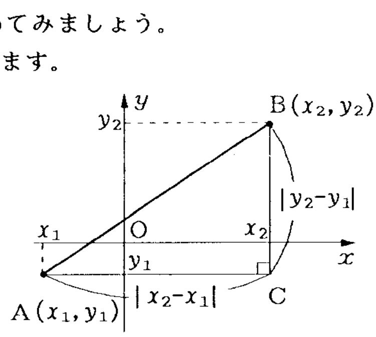
〔3〕平面上の2点間の距離の公式

◇AB が x 軸にも y 軸にも平行でない場合

一般に，2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離を求めてみましょう。

まず，AB が x 軸にも，y 軸にも平行でない場合を考えます。

右の図のように，A から y 軸に垂直な直線をひき，B から x 軸に垂直な直線をひいて，その交点を C とし，直角三角形 ABC をつくります。



すると，三平方の定理から，次の関係があります。

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$

ここで，AC は x 軸に平行，BC は y 軸に平行だから

$$AC=|x_2-x_1|,\quad BC=|y_2-y_1|$$

です。だから

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2+BC^2} \\ &= \sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

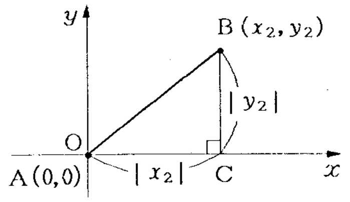
となります。

とくに，A が原点の場合を考えてみましょう。

上の①で，$x_1=0$，$y_1=0$ の場合ですから

$$AB=\sqrt{(x_2-0)^2+(y_2-0)^2}$$
$$=\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}$$

となります。



◇AB が x 軸，あるいは y 軸に平行な場合

次に，AB が x 軸に平行な場合を考えましょう。

このとき，右の図からわかるように

$$y_1=y_2,\quad AB=|x_2-x_1|$$

です。ところで，上の①の右辺で，$y_1=y_2$ とおくと

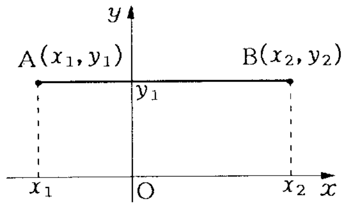
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$
$$=|x_2-x_1|$$

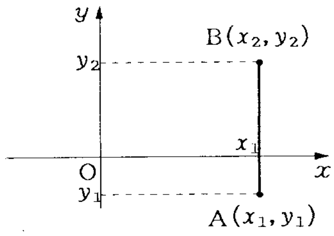
ですから，AB が x 軸に平行な場合も①が成り立ちます。

同じように，AB が y 軸に平行な場合を考えると

$$x_1=x_2,\quad AB=|y_2-y_1|$$

で，この場合も，①が成り立ちます。





◇平面上の2点間の距離の公式

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は
> $$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
> とくに，原点 O と点 $P(x,\ y)$ との距離は
> $$OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

この公式は，x_1とx_2，y_1とy_2の大小に関係なく成り立ちます。

➜それでは，公式を使って，平面上の2点間の距離を求めてみましょう。

基本例題1 　　　　平面上の2点間の距離(1)

次の2点 A，B 間の距離を求めなさい。

(1) A(0, 0)，B(5, −12)　　　　(2) A(−2, 3)，B(−1, −4)

◆ 考え方 ◆

A，B のどちらか一方が原点のときは，原点でないほうの点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$AB=\sqrt{x^2+y^2}$$

A，B のどちらも原点でないときは，2点の座標を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

◆ 解　答 ◆

(1) $AB=\sqrt{5^2+(-12)^2}$
$=\sqrt{25+144}$
$=\sqrt{169}$
$=13$

(2) $AB=\sqrt{\{-1-(-2)\}^2+(-4-3)^2}$
$=\sqrt{1^2+(-7)^2}$
$=\sqrt{1+49}$
$=\sqrt{50}$
$=5\sqrt{2}$

➜ A，B の x 座標，y 座標をきちんと確かめてから，公式に代入しましょう。

■■■トレーニング■■■

5 (0005)

次の２点 A，B 間の距離を求めなさい。

(1) A(5, 7)，B(1, 4)
(2) A(0, 0)，B(−8, 15)
(3) A(−7, −5)，B(0, −3)
(4) A($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$)，B($-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$)

➜ ここまでは，座標が数値で与えられていましたね。こんどは，座標が文字を使って与えられているときの２点間の距離を求めてみましょう。

基本例題２　　　平面上の２点間の距離(2)

２点 A(b, $2a+b$)，B($a+2b$, a) 間の距離を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

２点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) 間の距離の公式

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

で，$x_1=b$，$y_1=2a+b$，$x_2=a+2b$，$y_2=a$ の場合です。

これらを公式にあてはめて式変形し，できるだけ簡単な形にします。

◆ 解　答 ◆

$AB=\sqrt{\{(a+2b)-b\}^2+\{a-(2a+b)\}^2}$
$=\sqrt{(a+b)^2+\{-(a+b)\}^2}$
$=\sqrt{(a+b)^2+(a+b)^2}$
$=\sqrt{2(a+b)^2}$
$=\sqrt{2}\,|a+b|$　　➜ $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$

➜根号がはずせるときは，必ずはずします。このとき，絶対値記号を忘れないようにしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0006)

次の2点A，B間の距離を求めなさい。

(1) A(0, 0)，B($a+b$, $a-b$)

(2) A($-a+b$, $a-b$)，B(1, -1)

7 (0007)

次の2点A，B間の距離を求めなさい。

(1) A(a^2, ab)，B(ab, b^2)　　　(2) A(a^2, a)，B(1, $-a$)

➜それでは，これまで学習した2点間の距離を利用して，三角形の形を調べてみましょう。

例題1　　　　三角形の形状

3点A(-2, 5)，B(2, -3)，C(4,3)を頂点とする△ABCは，どんな形の三角形ですか。

◆ 考え方 ◆

△ABCの3辺の長さの関係から，三角形の形を調べます。

そのために，まず2点間の距離の公式を使って，AB^2，BC^2，CA^2を求めます。

そして，次の(1)，(2)を調べます。

(1) AB^2，BC^2，CA^2の中に等しいものがあるかどうか。

$AB>0$，$BC>0$，$CA>0$ですから，AB^2，BC^2，CA^2の中に等しいものがあることと，AB，BC，CAの中に等しいものがあることとは同じです。

だから，もし3つとも等しければ正三角形，2つだけ等しければ二等辺三角形です。

(2) AB^2，BC^2，CA^2の中の1番大きい値が他の2つの値の和になっているかどうか。

たとえば，$AB^2=BC^2+CA^2$が成り立てば，ABが斜辺，すなわち∠Cが直角の直角三角形です。

◆ 解　答 ◆

$AB^2=\{2-(-2)\}^2+(-3-5)^2$　　➜ AB^2，BC^2，CA^2を求めます。

$=4^2+(-8)^2$

$=16+64=80$　………①

$BC^2=(4-2)^2+\{3-(-3)\}^2$

$=2^2+6^2$

$=4+36=40$　………②

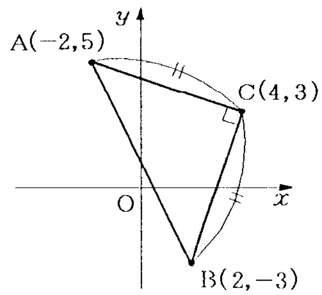
$CA^2=(-2-4)^2+(5-3)^2$

$=(-6)^2+2^2$

$=36+4=40$　………③

②，③から　$BC^2=CA^2$

➜ AB^2，BC^2，CA^2の中に等しいものがないかどうかを調べます。



ここで，$BC>0$，$CA>0$だから　$BC=CA$

よって，△ABCは$BC=CA$の二等辺三角形である。

また，①，②，③から　$AB^2=BC^2+CA^2$

➜ AB^2が1番大きいので，BC^2+CA^2に等しいかどうかを調べます。

よって，△ABCは∠Cが直角の直角三角形である。

したがって，△ABCは，∠Cが直角で，$BC=CA$の直角二等辺三角形である。

〈注意〉　ＡＢ，ＢＣ，ＣＡを計算して調べてもかまいませんが，AB^2，BC^2，CA^2 を計算するだけで，上のように調べられます。

→２点間の距離の公式さえまちがえなければ簡単ですね。さあ，トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0008)

次の３点を頂点とする△ＡＢＣは，どんな形の三角形ですか。

$A(1,\ -5)$，　$B(7,\ 3)$，　$C(-4,\ 5)$

9 ＊ (0009)

次の３点を頂点とする△ＡＢＣは，どんな形の三角形ですか。

$A(7,\ 3)$，　$B(2,\ 1)$，　$C(4,\ -4)$

→AB^2，BC^2，CA^2 の中の１番大きい値が他の２つの値の和になっていれば，三平方の定理の逆から，直角三角形であることがいえるのですね。

10 ＊ (0010)

次の３点を頂点とする△ＡＢＣは，どんな形の三角形ですか。

$A(a+b,\ a-b)$，　$B(2a+b,\ a)$，　$C(a-b,\ 3a-b)$

→がんばりましたね。直線上，平面上の点の座標，２点間の距離の求め方，どれも完全に理解できましたね。それでは，答え合わせをきちんとして終わりにしましょう。

まとめておこう！

1.　線分ＡＢの長さを２点Ａ，Ｂ間の距離といい，ＡＢと表します。
2.　直線上の点Ａの座標を a，点Ｂの座標を b とすると
$$AB=|b-a|$$
3.　２点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
とくに，原点Ｏと点 $P(x,\ y)$ との距離は
$$OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

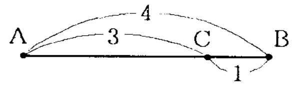
§2　内分する点の座標　中点，三角形の重心

前回学習したように，座標を使うと線分の長さが簡単に求められましたね。ここでは，線分をさらに2つの線分に分けることを考えてみます。そして，その分かれめの点の位置を座標を使って表してみます。

➜まず，線分を2つに分ける場合の新しいことばを覚えることから始めましょう。

〔1〕線分の内分（ないぶん）

◇線分の内分の意味

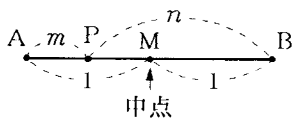


右の図のように，長さ4の線分ＡＢ上にＡＣ＝3となる点Ｃをとると，ＣＢ＝1となり

ＡＣ：ＣＢ＝3：1

ですね。

このとき，点Ｃは線分ＡＢを3：1に内分するといいます。



一般に，線分ＡＢ上に点Ｐがあって

ＡＰ：ＰＢ＝m：n

ただし，$m>0$，$n>0$

であるとき，点Ｐは線分ＡＢをm：nに内分するといいます。また，点Ｐは線分ＡＢの内分点であるといいます。

とくに

ＡＭ：ＭＢ＝1：1

である点Ｍを線分ＡＢの中点といいます。

◇線分ＡＢの内分と線分ＢＡの内分

上の点Ｃは，見方を変えると

ＢＣ：ＣＡ＝1：3

となる点ですね。

だから，点Ｃは線分ＢＡを1：3に内分する点であるといえます。

このように，同じ2点Ａ，Ｂを両端にもつ線分上で

線分ＡＢをm：nに内分する点は，線分ＢＡをn：mに内分する点

になっています。

つまり，点Ｐが

線分ＡＢを内分する比は，Ａからの長さ：Ｂからの長さ

線分ＢＡを内分する比は，Ｂからの長さ：Ａからの長さ

で表します。

➜それでは，さっそく内分の意味がきちんと理解できたかどうか，トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0011)

図の中に，次の点をかきこみなさい。

線分ＡＢを2：1に内分する点Ｐ

線分ＢＡを3：1に内分する点Ｑ

線分ＡＢの中点Ｍ

➜内分の意味はわかりましたね。では，次に，直線上の内分点の座標を求めてみましょう。

〔2〕直線上の内分点の座標

◇線分ＡＢを $m:n$ に内分する点の座標

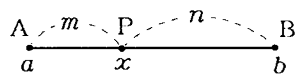
線分ＡＢを $m:n$ に内分する点Ｐの座標を求めてみましょう。

2点Ａ，Ｂの座標をそれぞれ a，b とし，Ｐの座標を x とします。

内分の意味から

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

ですね。



ここで，$a<b$ とすると，$a<x<b$ で

$$\mathrm{AP}=|x-a|$$
$$=x-a$$
$$\mathrm{PB}=|b-x|$$
$$=b-x$$

です。

これらを①に代入すると

$$(x-a):(b-x)=m:n$$

すなわち　$n(x-a)=m(b-x)$

これを x について解くと

$$nx-na=mb-mx$$
$$(m+n)x=mb+na$$

したがって　$x=\dfrac{mb+na}{m+n}$　$\cdots\cdots\cdots$②

$a>b$ として，同様に x について解くと，やはり②が導かれます。

とくに，線分ＡＢの中点はＡＢを1：1に内分する点だから，その座標は，②で $m=n=1$ とおいた

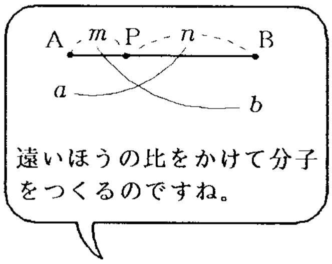
$$x=\frac{1\cdot b+1\cdot a}{1+1}$$
$$=\frac{a+b}{2}$$

です。

◇直線上の内分点の座標

ここまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2点 A，B の座標をそれぞれ a，b とするとき
> 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は
> $$\frac{mb+na}{m+n}$$
> とくに，中点の座標は $\dfrac{a+b}{2}$



➜内分点や中点の座標の求め方はわかりましたね。では，基本例題で具体的に考えてみましょう。

基本例題 1 　　直線上の内分点

2点 A，B の座標をそれぞれ −4，6 とするとき，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 3：2 に内分する点　　(2) 線分 AB の中点

◆ 考え方 ◆

A，B の座標をそれぞれ a，b とするとき，

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{mb+na}{m+n}$

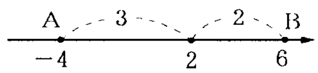
線分 AB の中点の座標は $\dfrac{a+b}{2}$

となります。

◆ 解　答 ◆

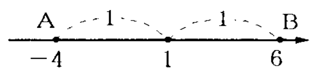
(1) $\dfrac{3\cdot6+2\cdot(-4)}{3+2}$

$=\dfrac{18-8}{5}=\dfrac{10}{5}=2$



(2) $\dfrac{-4+6}{2}$

$=\dfrac{2}{2}=1$



➜図をかいてみて，公式が正しく使えたかどうかを確かめるようにしましょう。

■■■トレーニング■■■

2 (0012)

2点 A，B の座標をそれぞれ−7，3 とするとき，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 4：1 に内分する点　　(2) 線分 BA を 3：5 に内分する点

(3) 線分 AB の中点

3 (0013)

2点 A，B の座標がそれぞれ次のように与えられているとき，線分 AB を 1：4 に内分す

る点の座標を求めなさい。

(1)　A の座標 -3，B の座標 2　　　(2)　A の座標 $2\sqrt{2}$，B の座標 $5-3\sqrt{2}$

4　(0014)

2点 A，B の座標をそれぞれ $(a+b)^2$，$(a-b)^2$ とするとき，次の点の座標を求めなさい。

(1)　線分 AB を 2：3 に内分する点　　　(2)　線分 BA を 4：1 に内分する点

(3)　線分 AB の中点

➜直線上の内分点の座標は求められるようになりましたね。次に，平面上の内分点の座標を求めてみましょう。

〔3〕平面上の内分点

◇点 A，B，P から x 軸，y 軸へ垂線をひく

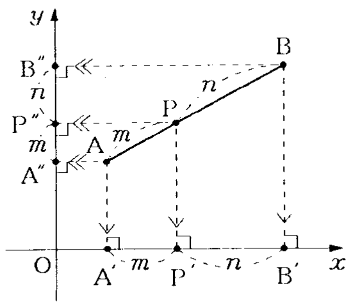
平面上の2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ について，線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(x,\ y)$ の座標を求めてみましょう。

そのために，点 A，B，P から，それぞれ x 軸に垂線をひき，x 軸との交点を A′，B′，P′ とします。

すると，AA′ // BB′ // PP′ ですから

$$A'P' : P'B' = AP : PB = m : n$$

つまり，点 P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に内分します。



同じように，点 A，B，P から，それぞれ y 軸に垂線をひき，y 軸との交点を A″，B″，P″ とすると，AA″ // BB″ // PP″ ですから

$$A''P'' : P''B'' = AP : PB = m : n$$

つまり，点 P″ は線分 A″B″ を $m:n$ に内分します。

◇線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標

点 P′ の x 座標は，直線上の内分点の座標の公式から

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

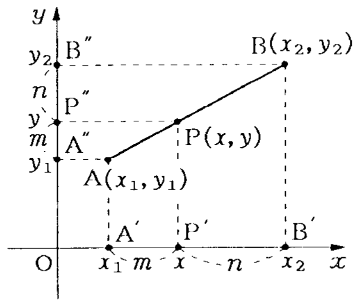
同じように，点 P″ の y 座標は

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

したがって，点 P の座標は

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となります。



とくに，線分 AB の中点は AB を 1：1 に内分する点だから，その座標は，①で $m=n=1$ とおいた

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

です。

◇平面上の内分点の座標

ここまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ について
>
> 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
>
> とくに，中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

➜平面上の内分点の座標は，x 座標どうし，y 座標どうしに，それぞれ直線上の内分点の考えをあてはめたものになっているのですね。さっそく，次の基本例題で使ってみましょう。

基本例題2　　平面上の内分点

2点 A(4, −1)，B(−10, 6) について，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を5：2に内分する点 P　　(2) 線分 AB の中点 M

◆ 考え方 ◆

$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とするとき，

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

となります。

◆ 解　答 ◆

(1) x 座標は　$\dfrac{5\cdot(-10)+2\cdot4}{5+2}=\dfrac{-50+8}{7}=\dfrac{-42}{7}=-6$

y 座標は　$\dfrac{5\cdot6+2\cdot(-1)}{5+2}=\dfrac{30-2}{7}=\dfrac{28}{7}=4$

したがって，P の座標は　$(-6,\ 4)$

(2) x 座標は　$\dfrac{4+(-10)}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

y 座標は　$\dfrac{-1+6}{2}=\dfrac{5}{2}$

したがって，M の座標は　$\left(-3,\ \dfrac{5}{2}\right)$

■■■トレーニング■■■

5　(0015)

2点 A(−5, 2)，B(1, 6) について，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を3：1に内分する点　　(2) 線分 AB を5：2に内分する点

(3) 線分 AB の中点

6 (0016)

次の2点A，Bについて，線分ABを2：3に内分する点の座標を求めなさい。

(1) A(3, 4)，B(8, 9) (熊本商業大)　　　(2) A(3, −2)，B(4, 5)

7 (0017)

2点$A(a+b,\ a-b)$，$B(a-b,\ a+b)$について，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分ABを1：2に内分する点　　　(2) 線分BAを3：2に内分する点

(3) 線分ABの中点

➜こんどは，これまでに学習したことをもとにして，三角形の重心について考えてみましょう。

基本例題3　　三角形の重心の座標

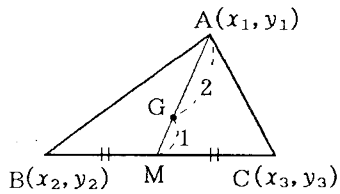
3点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$を頂点とする△ABCの重心Gの座標を求めなさい。

◆考え方◆

三角形の重心は，各中線を2：1に内分する点です。

まず，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$から辺BCの中点Mの座標を求めます。

次に，$A(x_1,\ y_1)$とMの座標から中線AMを2：1に内分する点の座標を求めます。



◆解　答◆

辺BCの中点をMとすると，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$から，Mの座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)\quad\cdots\cdots\text{①}$$

重心Gは線分AMを2：1に内分する点だから，$A(x_1,\ y_1)$と①より

x 座標は $\dfrac{2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}+1\cdot x_1}{2+1}=\dfrac{x_2+x_3+x_1}{3}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

y 座標は $\dfrac{2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}+1\cdot y_1}{2+1}=\dfrac{y_2+y_3+y_1}{3}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

したがって，Gの座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

➜重心の座標の求め方はわかりましたね。三角形の重心の座標はきれいな形の式で表されますから，公式として使うことにしましょう。

三角形の重心の座標

3点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$を頂点とする△ABCの重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

➜では，次のトレーニングをして，三角形の重心の座標の公式を使ってみましょう。

重心のx座標，y座標は，それぞれ３つの頂点のx座標，y座標を加えて３で割ったものですね。

■■■トレーニング■■■

8 (0018)

次の３点を頂点とする△ＡＢＣの重心の座標を求めなさい。

(1) A(2, 4), B(6, 7), C(−2, 10)

(2) A(7, 4), B(9, −2), C(2, −3)

9 (0019)

次の３点を頂点とする△ＡＢＣの重心の座標を求めなさい。

(1) A(2, 1), B(4, 6), C(−3, 2)

(2) A(5, 2), B(−2, 3), C(1, −4)

➜座標を利用すると，三角形の重心までも，計算で簡単に求められるのですね。
では，もう少しがんばってもいいなと思っている人は，次のもっと力をつけように進みましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

10 * (0020)

△ＡＢＣの辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとするとき，△ＰＱＲの重心と△ＡＢＣの重心が一致することを示しなさい。

➜重心が一致することを示すには，重心の座標が等しくなることを示せばよいのです。
A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)とおいて考えましょう。

11 * (0021)

六角形ＡＢＣＤＥＦがあります。辺ＡＢ，ＣＤ，ＥＦの中点をそれぞれＬ，Ｍ，Ｎ，辺ＢＣ，ＤＥ，ＦＡの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとするとき，△ＬＭＮの重心Ｇと△ＰＱＲの重心Ｇ′が一致することを示しなさい。

まとめておこう！

1.　数直線上の２点Ａ，Ｂの座標をそれぞれa，bとすると
　　線分ＡＢを$m:n$に内分する点の座標は　$\dfrac{mb+na}{m+n}$

2.　座標平面上の２点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$について
　　線分ＡＢを$m:n$に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

3.　３点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$を頂点とする△ＡＢＣの
　　重心の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

➔それでは，ここまでがんばったのですから，答え合わせもテキパキすませて，終わりにしましょう。

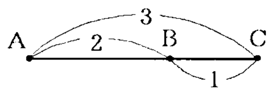
§3　外分する点の座標

前回は，1つの線分の上に点を1つとって，2つの線分に分けましたね。ここでは，これと少しだけ違って，線分上でなく，線分の延長上に点をとって，2つの線分を考えていきます。前回との違いに気をつけて，効果的に学習を進めましょう。

➜それでは，スタートです。

〔1〕線分の外分（がいぶん）

◇線分の外分の意味

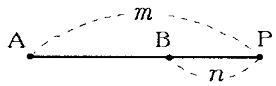


右の図のように，長さ2の線分ＡＢの延長上に，ＡＣ＝3となる点Ｃをとると，ＣＢ＝1となり

ＡＣ：ＣＢ＝3：1

ですね。

このとき，点Ｃは線分ＡＢを3：1に外分するといいます。



一般に，線分ＡＢの延長上に点Ｐがあって

ＡＰ：ＰＢ＝m：n　　ただし，$m>0$，$n>0$，$m \neq n$

であるとき，点Ｐは線分ＡＢをm：nに外分するといいます。また，点Ｐは線分ＡＢの外分点であるといいます。

➜線分上にあるのが内分点，線分の延長上にあるのが外分点なのですね。

◇線分ＡＢの外分点と線分ＢＡの外分点

内分のときと同じように，同じ2点を両端にもつ線分の延長上で

線分ＡＢをm：nに外分する点は，線分ＢＡをn：mに外分する点

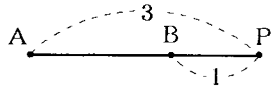
になっています。

つまり，点Ｐが

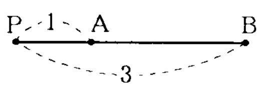
線分ＡＢを外分する比は，Ａからの長さ：Ｂからの長さ

線分ＢＡを外分する比は，Ｂからの長さ：Ａからの長さ

で表します。



だから，たとえばＡＰ：ＰＢ＝3：1のように，Ａからの長さがＢからの長さより大きいときは，点Ｐは，右のようにＢのほうに延ばした直線上にあります。



逆に，ＡＰ：ＰＢ＝1：3のように，Ａからの長さがＢからの長さより小さいときは，点Ｐは，Ａのほうに延ばした直線上にあります。

➜では，外分の意味を確かめるトレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

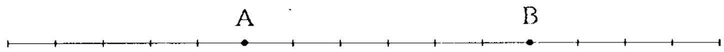
1 (0022)

図の中に，次の点をかきこみなさい。

線分ＡＢを３：１に外分する点Ｐ

線分ＢＡを４：１に外分する点Ｑ

線分ＡＢを２：５に外分する点Ｒ



➜では，次に，直線上の外分点の座標を求めてみましょう。

〔2〕直線上の外分点の座標

◇線分ＡＢを $m:n$ に外分する点の座標

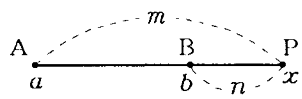
線分ＡＢを $m:n$ に外分する点Ｐの座標を求めてみましょう。

２点Ａ，Ｂの座標をそれぞれ a，b とし，Ｐの座標を x とします。

外分の意味から

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ですね。



ここで，$a<b$，$m>n$ とすると，$a<b<x$ で

$$\mathrm{AP}=|x-a|=x-a$$

$$\mathrm{PB}=|b-x|=x-b$$

です。これらを①に代入すると

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

すなわち　$n(x-a)=m(x-b)$

これを x について解くと　$nx-na=mx-mb$

$$(n-m)x=na-mb$$

したがって　$x=\dfrac{na-mb}{n-m}$

$$=\frac{mb-na}{m-n} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$a<b$，$m<n$ のとき，$a>b$，$m>n$ のとき，$a>b$，$m<n$ のときも，同様にして②が導かれます。

◇直線上の外分点の座標

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

２点Ａ，Ｂの座標をそれぞれ a，b とするとき，線分ＡＢを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\frac{mb-na}{m-n}$$

内分点の座標の公式で，n を $-n$ でおきかえた形ですね。

→外分点の座標の求め方はわかりましたね。では，いつものように，基本例題を考えてみましょう。

基本例題 1　　　　直線上の外分点

2点 A，B の座標をそれぞれ -3，5 とするとき，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 1：2 に外分する点　　(2) 線分 BA を 1：2 に外分する点

◆ 考え方 ◆

2点 A，B の座標がそれぞれ a，b のとき，線分 AB を $m：n$ に外分する点の座標は

$$\frac{mb-na}{m-n}$$

線分 BA を $m：n$ に外分する点の座標は，上の式で a と b を入れかえた

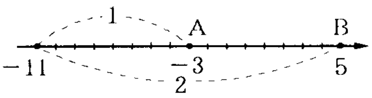
$$\frac{ma-nb}{m-n}$$

となります。

◆ 解　答 ◆

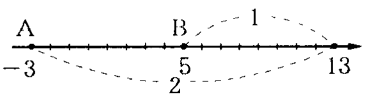
(1) $\dfrac{1\cdot5-2\cdot(-3)}{1-2}$

$=\dfrac{5+6}{-1}=\dfrac{11}{-1}=-11$



(2) $\dfrac{1\cdot(-3)-2\cdot5}{1-2}$

$=\dfrac{-3-10}{-1}=\dfrac{-13}{-1}=13$



→やはり，図をかいてみるといいですね。

■■■トレーニング■■■

2 (0023)

次の点の座標を求めなさい。

(1) 2点 A，B の座標を 2，5 とするとき，線分 AB を 4：1 に外分する点

(2) 2点 A，B の座標を -3，1 とするとき，線分 AB を 2：3 に外分する点

(3) 2点 A，B の座標を 4，0 とするとき，線分 BA を 1：2 に外分する点

(4) 2点 A，B の座標を -3，-2 とするとき，線分 BA を 5：3 に外分する点

3 (0024)

2点 A，B の座標をそれぞれ $3a+2b$，$3a-2b$ とするとき，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 2：3 に外分する点　　(2) 線分 BA を 4：3 に外分する点

→直線上の外分点の座標は求められるようになりましたね。こんどは，平面上で外分点の座標を考えてみましょう。

〔3〕平面上の外分点

◇点 A，B，P から x 軸，y 軸に垂線をひく

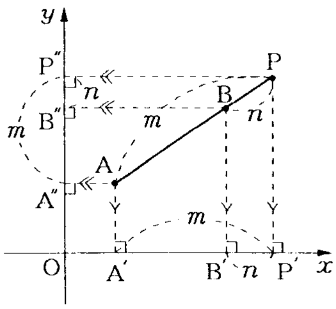
平面上の2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ について，線分 AB を $m:n$ に外分する点 $P(x,\ y)$ の座標を求めてみましょう。

そのために，内分点のときと同じように，点 A，B，P から，それぞれ x 軸，y 軸に垂線をひきます。

そして，x 軸との交点を A′，B′，P′，y 軸との交点を A″，B″，P″ とすると，AA′ // BB′ // PP′，AA″ // BB″ // PP″ から

$$A'P' : P'B' = AP : PB = m : n$$
$$A''P'' : P''B'' = AP : PB = m : n$$

です。



つまり，点 P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に外分し，点 P″ は線分 A″B″ を $m:n$ に外分します。

◇ AB を $m:n$ に外分する点の座標

点 P′ の x 座標は，直線上の外分点の座標の公式から

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

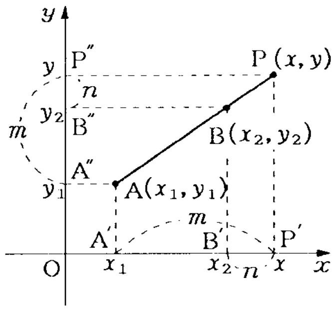
同じように，点 P″ の y 座標は

$$y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$$

したがって，点 P の座標は

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

となります。



◇平面上の外分点の座標

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ について，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は
>
> $$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\quad ただし，m \neq n$$

➜この公式は，x_1 と x_2，y_1 と y_2，m と n の大小に関係なく成り立ちます。

➜ x 座標，y 座標ともに直線上の外分点の座標の公式の形になっていますね。

基本例題2　　平面上の外分点

2点 $A(5,\ -1)$，$B(-4,\ 6)$ について，次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 1：2 に外分する点 P　　(2) 線分 BA を 3：2 に外分する点 Q

◆ 考え方 ◆

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ について，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

です。また，線分 BA を $m:n$ に外分する点の座標は，上の座標の式の x_1 と x_2，y_1 と y_2 をいれかえたものです。

◆ 解　答 ◆

(1)　x 座標は　$\dfrac{1\cdot(-4)-2\cdot5}{1-2}=\dfrac{-4-10}{-1}=\dfrac{-14}{-1}=14$　$\rightarrow \dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

y 座標は　$\dfrac{1\cdot6-2\cdot(-1)}{1-2}=\dfrac{6+2}{-1}=\dfrac{8}{-1}=-8$　$\rightarrow \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$

したがって，P の座標は　$(14,\ -8)$

(2)　x 座標は　$\dfrac{3\cdot5-2\cdot(-4)}{3-2}=\dfrac{15+8}{1}=23$　$\rightarrow \dfrac{mx_1-nx_2}{m-n}$

y 座標は　$\dfrac{3\cdot(-1)-2\cdot6}{3-2}=\dfrac{-3-12}{1}=-15$　$\rightarrow \dfrac{my_1-ny_2}{m-n}$

したがって，Q の座標は　$(23,\ -15)$

→では，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

4　(0025)

2点 A$(-3,\ -5)$，B$(7,\ 3)$ について，線分 AB を，次の比に外分する点の座標を求めなさい。

(1)　2：1　　　(2)　1：5

5　(0026)

4点 A$(-1,\ -2)$，B$(-3,\ 4)$，C$(-3,\ -2)$，D$(3,\ 7)$ について，次の点の座標を求めなさい。

(1)　線分 AB を 5：3 に外分する点　　　(2)　線分 BA を 5：3 に外分する点

(3)　線分 CD を 4：1 に外分する点　　　(4)　線分 DC を 4：1 に外分する点

6　(0027)

2点 A$(5a-2b,\ a+3b)$，B$(a-3b,5a+2b)$ について，次の点の座標を求めなさい。

(1)　線分 AB を 1：5 に外分する点　　　(2)　線分 BA を 2：3 に外分する点

→ここまでくれば，外分はもうすっかり自分のものになりましたね。もう少しがんばってみたい人は，次の問題に挑戦しましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

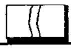
7 *　(0028)

△ABC の辺 BC，CA，AB を $m:n$ に外分する点をそれぞれ P，Q，R とするとき，△PQR の重心と △ABC の重心は一致することを示しなさい。

まとめておこう！

$m>0$，$n>0$，$m \neq n$とします。

1. 線分ＡＢの延長上に点Ｐがあって，ＡＰ：ＰＢ＝m：nであるとき，
   点Ｐは線分ＡＢをm：nに外分するといいます。
2. 数直線上の２点Ａ，Ｂの座標をそれぞれa，bとすると
   線分ＡＢをm：nに外分する点の座標は　$\dfrac{mb-na}{m-n}$
3. 座標平面上の２点Ａ(x_1, y_1)，Ｂ(x_2, y_2)について
   線分ＡＢをm：nに外分する点の座標は　$\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$



➜外分の意味と内分の意味の違いをきちんとおさえれば，あとの考え方は同じですね。
さあ，これで，ここでの学習を終わりにしましょう。

§4　点の座標の利用　中線定理など

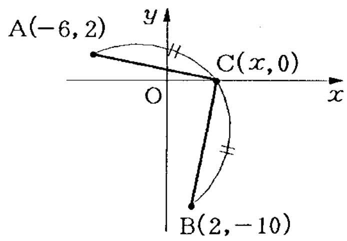
これまで，直線上や平面上の，2点間の距離，内分点，中点，外分点の座標について学習しましたね。ここでは，これらを図形の問題に利用してみます。図形の問題も座標を使って表すと，計算だけで簡単に解くことができるのです。これまで図形が苦手だった人もきっと得意になりますよ。

➜さっそく，距離の公式を使う図形の問題から考え始めましょう。

例題1　2点から等距離にある点の座標

2点A$(-6,\ 2)$，B$(2,\ -10)$から等距離にあるx軸上の点Cの座標を求めなさい。

◆考え方◆



わからないものを文字で表します。この場合は点Cの座標です。

点Cはx軸上にありますから，その座標は$(x,\ 0)$とおくことができます。

次に，条件を式で表現します。

点Cが2点A，Bから等距離にあるのですから

$$AC=BC,\ すなわち\ AC^2=BC^2$$

が成り立ちます。この式を，2点間の距離の公式を使って文字xで表し，方程式をつくります。

◆解　答◆

点Cは2点A，Bから等距離にあるから

$$AC^2=BC^2$$

点Cの座標を$(x,\ 0)$とおくと，A$(-6,\ 2)$，B$(2,\ -10)$だから

$$\{x-(-6)\}^2+(0-2)^2=(x-2)^2+\{0-(-10)\}^2$$

これを解くと　$x^2+12x+40=x^2-4x+104$

$$16x=64$$

$$x=4$$

したがって，点Cの座標は　$(4,\ 0)$

➜与えられた条件を方程式に表すことができれば，あとは計算だからやさしいですね。では，トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 * (0029)

2点A$(-4,\ -2)$，B$(8,\ 2)$があります。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　2点A，Bから等距離にあるx軸上の点Cの座標を求めなさい。

(2)　2点A，Bから等距離にあるy軸上の点Dの座標を求めなさい。

2 * (0030)

2点 A(1, −3), B(3, 2) から等距離にある直線 $y=2x$ 上の点 C の座標を求めなさい。

➜次の問題は，求める座標が 1 つとは限りませんよ。

3 * (0031)

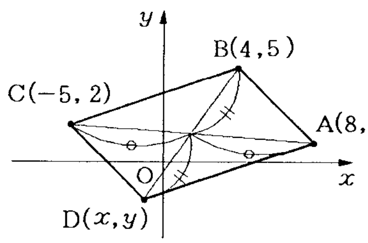
2点 A(−2, −1), B(−4,3) を頂点とする正三角形の残りの頂点 C の座標を求めなさい。

➜では，次に，内分点や外分点の座標の公式を使う問題を考えてみましょう。

例題 2 　分点の座標の利用

平行四辺形 ABCD で，頂点 A，B，C の座標がそれぞれ (8, 1), (4, 5), (−5, 2) であるとき，残りの頂点 D の座標を求めなさい。

◆ 考え方 ◆



求める点 D の座標を $(x,\ y)$ とおいて，与えられた条件を文字 x，y を使った式で表すことを考えます。

平行四辺形になるための条件の中で長さだけできまるのは，向かい合う辺の長さが等しいという条件と，対角線がたがいの中点で交わるという条件です。

ここでは，対角線がたがいの中点で交わることを中点の座標を利用して表し，方程式をつくります。

◆ 解　答 ◆

平行四辺形の対角線はたがいの中点で交わるから，線分 AC，BD の中点は一致する。

AC の中点の座標は　$\left(\dfrac{8+(-5)}{2},\ \dfrac{1+2}{2}\right)$

点 D の座標を $(x,\ y)$ とおくと，BD の中点の座標は

$$\left(\frac{4+x}{2},\ \frac{5+y}{2}\right)$$

よって　$\dfrac{8+(-5)}{2}=\dfrac{4+x}{2}$，$\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{5+y}{2}$

これをそれぞれ解くと　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{4+x}{2}$　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{5+y}{2}$

$x=-1$　$y=-2$

したがって，頂点 D の座標は　$(-1,\ -2)$

➜図形の問題では，与えられた条件はもちろんのこと，図形の性質をうまく式に表すことがたいせつです。それもできるだけ簡単な形で表します。

■■■トレーニング■■■

4 * (0032)

△ABC で A(1, 5), B(2, 0), 重心 G(2, 3) であるとき，頂点 C の座標を求めなさい。

5 * (0033)

平行四辺形 ABCD で，頂点 A，B，D の座標がそれぞれ (3, 1), (4, 7), (−3, −1)

であるとき，残りの頂点Ｃの座標を求めなさい。

6 ＊ (0034)

△ＡＢＣの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡの中点の座標がそれぞれ(3, 1)，(−1, 2)，(−2, −1)であるとき，頂点Ａ，Ｂ，Ｃの座標を求めなさい。

➜この場合，わからないものは頂点Ａ，Ｂ，Ｃの x 座標，y 座標，合わせて6つです。

7 ＊ (0035)

△ＡＢＣの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡを2：5に外分する点の座標がそれぞれ(8, −5)，(−8, 7)，(9, 4)であるとき，頂点Ａ，Ｂ，Ｃの座標を求めなさい。

➜これまでは，あらかじめ座標が与えられたとき，一定の条件を満たす点の座標を求めましたね。こんどは，自分で適当に座標をきめて，図形の性質を証明していくことを考えましょう。

〔1〕座標を利用した図形の性質の証明

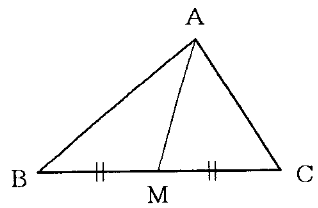
◇座標を利用した図形の性質の証明のしかた

次のような図形の性質を証明する問題を考えましょう。

“△ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとすると

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

であることを証明しなさい。”



これまでは，このような問題では

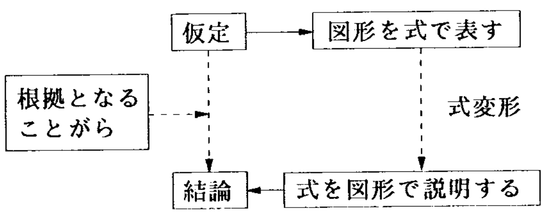
仮定から出発して，すでに正しいとわかっている図形の性質を根拠にして，すじ道をたてて結論を導く。

という方法を使いましたね。ところが，上の問題は，このようなこれまでの方法よりも

点Ａ，Ｂ，Ｃ,Ｍを座標で表し,距離の公式を使って,AB^2+AC^2 と $2(AM^2+BM^2)$ を計算して比べる

という方法のほうが,簡単に証明できます。

同じように，仮定で示された図形やその関係を，座標を使った式で表すと，式を変形していくだけで，簡単にその式から図形の性質を説明できる場合があります。

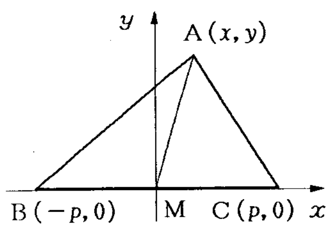


◇図形を式で表すときの座標軸のとり方

図形やその関係を座標を使った式で表すとき，座標軸のとり方で式は変わります。

座標軸はどうとってもかまいませんが，ふつう途中の計算が楽になるようにくふうしてとります。

たとえば，上の問題の場合は，直線ＢＣを x 軸に，Ｍを通りＢＣに垂直な直線を y 軸にとると，Ａ，Ｂ，Ｃの座標はそれぞれ $(x,\ y)$，$(-p,\ 0)$，$(p,\ 0)$ と，x，y，p の3文字だけで表せます。



このように

① できるだけ多くの点が座標軸上にくるようにする

② 特定の点を原点にとる

など，少ない文字で座標を表すように座標軸をとります。

◇式の変形のしかた

座標軸のとり方がきまったら，図形やその関係を座標を使った式で表して，式を変形していきます。

上の問題では，直線上や平面上の２点間の距離の公式から

$AB^2=\{x-(-p)\}^2+(y-0)^2$　　$AC^2=(x-p)^2+(y-0)^2$

$AM^2=x^2+y^2$　　$BM^2=|0-(-p)|^2$

ですから，これを AB^2+AC^2，$2(AM^2+BM^2)$ にあてはめて，それぞれ変形していき，同じ式を導きます。

結論がことばで表されているときは，その結論を得るのにどんな式を示せばよいのかを考えて，式を変形していきます。

➜それでは，上でとりあげた問題を実際に証明してみましょう。

例題３　　座標を利用した図形の性質の証明

△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，次の等式を証明しなさい。

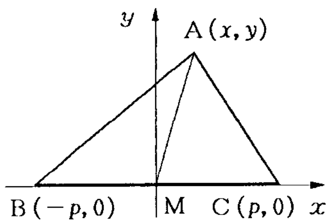
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$　　（中線定理）

◆ 考え方 ◆

次の手順にしたがって証明します。

① 適当な座標軸をとります。

この場合，直線 BC を x 軸に，M を通り BC に垂直な直線を y 軸にとります。



② 座標を使って，図形やその関係を式で表します。

A，B，C の座標は，3 つの文字 x, y, p を使って，それぞれ $(x,\ y)$，$(-p,\ 0)$，$(p,\ 0)$ と表すことができます。

AB^2+AC^2，$2(AM^2+BM^2)$ を x，y，p で表します。

③ ②の式を計算して，結論を導きます。

◆ 解　答 ◆

直線 BC を x 軸に，M を通り BC に垂直な直線を y 軸にとると，頂点 A，B，C の座標はそれぞれ

$(x,\ y)$，$(-p,\ 0)$，$(p,\ 0)$

と表される。

よって

$$\begin{aligned}AB^2&=\{x-(-p)\}^2+(y-0)^2\\&=(x+p)^2+y^2\\AC^2&=(x-p)^2+(y-0)^2\\&=(x-p)^2+y^2\\AM^2&=x^2+y^2\\BM^2&=|0-(-p)|^2\\&=p^2\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}AB^2+AC^2&=\{(x+p)^2+y^2\}+\{(x-p)^2+y^2\}\\&=x^2+2px+p^2+y^2+x^2-2px+p^2+y^2\end{aligned}$$

$$=2(x^2+y^2+p^2)$$

$$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)=2\{(x^2+y^2)+p^2\}$$

$$=2(x^2+y^2+p^2)$$

したがって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

〈注意〉　この定理は，中線定理，あるいはパップスの定理といわれるものです。

➜三角形を座標で表すといっても，座標軸のとり方はいろいろ考えられます。図形の性質や与えられた条件を利用して，じょうずに座標軸をとるには，どうしたらよいか考えながら，トレーニングしましょう。

--------• ちょっとひとこと •--------

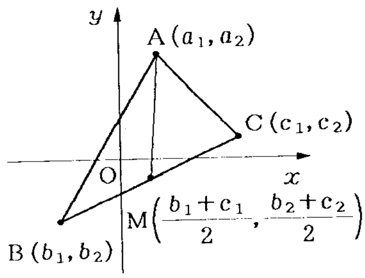
◦　例題3の問題で

$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$

$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$

$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$

となるように座標軸をとって計算してみましょう。



Mは BC の中点だから，その座標は

$$\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{b_2+c_2}{2}\right)$$

よって

$$\mathrm{AB}^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$\mathrm{AC}^2=(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2$$

$$\mathrm{AM}^2=\left(\frac{b_1+c_1}{2}-a_1\right)^2+\left(\frac{b_2+c_2}{2}-a_2\right)^2$$

$$\mathrm{BM}^2=\left(\frac{b_1+c_1}{2}-b_1\right)^2+\left(\frac{b_2+c_2}{2}-b_2\right)^2$$

これをていねいに計算していくと，結論の式がでますがたいへんです。座標軸のとり方のたいせつさがわかりますね。

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0036)

△ABC の辺 BC を 3：2 に内分する点を P とするとき，次の等式を証明しなさい。

$$2(2\mathrm{AB}^2+3\mathrm{AC}^2)=5(2\mathrm{AP}^2+3\mathrm{PC}^2)$$

9 ＊ (0037)

直角三角形 ABC の斜辺 AB を3等分する点を A のほうから D，E とするとき，次の等式を証明しなさい。

$$3(\mathrm{CD}^2+\mathrm{CE}^2+\mathrm{DE}^2)=2\mathrm{AB}^2$$

10 ＊ (0038)

平面上に長方形 ABCD と点 P があります。この平面上で点 P をどこにとっても次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2=\mathrm{PB}^2+\mathrm{PD}^2$$

➜少し計算がめんどうなのもありましたが，がんばりましたね。まだ，がんばる気のある人は，次の問題も解いてみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

11 ＊ (0039)

定点 A(5, 5) と動点 B(x, $2x$) があります。AB が最小になるときの点 B の座標を求めなさい。

12 ＊ (0040)

2 点 A(2, 1), B(-4, -3) があるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ が最小になる点 P の座標を求めなさい。

➜それでは，答え合わせをすませたら終わりにしましょう。ごくろうさま。

§5　直線の方程式(1)　1点を通り，傾き m の直線の方程式，2点を通る直線の方程式

ここでは，図形の中でも，もっとも簡単な直線を式で表してみます。中学校でも，直線の式については学習しましたから，今回の学習は復習的な色あいが濃くなりますが，力をぬかずに最後まできちんと学習しましょう。

➡まず，方程式とグラフの関係，とくに直線と方程式の関係を調べましょう。

〔1〕直線の傾きと方程式

◇方程式とグラフ

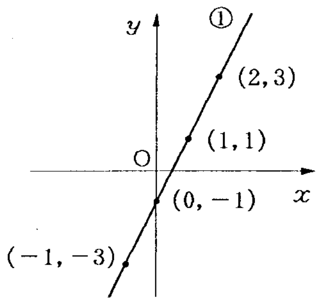
方程式 $2x-y-1=0$………①を考えましょう。

たとえば $(-1,\ -3)$，$(0,\ -1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$，……などは，①の解になっている，実数 x，y の組 $(x,\ y)$ です。

これらを座標とする点全体の集合

$\{(x,\ y)\mid 2x-y-1=0\}$ を考えると，右の図のような直線になっています。

この方程式 $2x-y-1=0$ のグラフである直線のことを直線 $2x-y-1=0$ といいます。



また，方程式に着目して，方程式①のグラフが直線であるとき，①を直線の方程式といいます。

一般に，方程式の実数解を座標とする点全体の集合をその方程式の表す図形，または方程式のグラフといい，その方程式をその図形の方程式といいます。

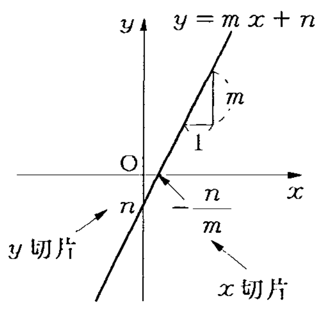
◇傾き，y 切片，x 切片

中学校で学習したように，方程式 $y=mx+n$ は直線を表しました。

そして，m は，傾きといい，x が1ふえると y がどれだけふえるか，つまり直線の傾きぐあいを表します。

また，n は，y 切片といい，直線と y 軸との交点の y 座標を表しました。

さらに，直線と x 軸との交点の x 座標を x 切片といいます。



◇点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式

傾きが m の直線の方程式は，その y 切片を n とすれば，次のように表されますね。

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

ところで，この直線が点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき

$$y_1=mx_1+n$$

だから，n について解くと　　$n=y_1-mx_1$

これを②に代入して n を消去すると

直線は，傾きと y 切片で1つにきまりますね。

$$y=mx+y_1-mx_1$$

すなわち

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

となります。

◇１点と傾きの与えられた直線の方程式

上のことより，１点と傾きの与えられた直線の方程式は，次のようになります。

> 点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は
> $$y-y_1=m(x-x_1)$$

〈注意〉　x 軸に平行というのは，傾き m が０のときです。このとき，上の公式から $y-y_1=0$，すなわち $y=y_1$ となります。

➜きれいな形をした公式ですね。しばしば使われますから，きちんと覚えておきましょう。

基本例題１　　１点と傾きの与えられた直線の方程式

点 (3，4) を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めなさい。

(1)　傾きが２　　　(2)　x 軸に平行

◆考え方◆

直線が通る１点 $(x_1,\ y_1)$ と傾き m が与えられていますから，公式

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

に代入して求めます。

また，x 軸に平行であるのは，上の公式で $m=0$ のときで，$y=y_1$ となります。

◆解　答◆

(1)　点 (3，4) を通り，傾きが２だから　　➜ $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-4=2(x-3)$$
$$y-4=2x-6$$

すなわち　$y=2x-2$

(2)　点 (3，4) を通り，x 軸に平行だから

$y=4$　　➜ $y=y_1$ で，$y_1=4$ の場合です。

➜１点と傾きがわかっている直線の方程式は，簡単に求めることができますね。

■■■トレーニング■■■

1　(0041)

次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　点 (2，3) を通り，傾きが−2

(2)　点 (4，−1) を通り，傾きが３

2　(0042)

次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　点 $(0,\ -3)$ を通り，x 軸に平行

(2)　点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{5}\right)$ を通り，傾きが 0

➜ 1 点と傾きが与えられた直線の方程式はもう求められるようになりましたね。では次に，2 点を通る直線の方程式を求めてみましょう。

〔2〕2 点を通る直線の方程式

◇ y 軸に平行でない場合

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めてみましょう。

この直線は，y 軸と平行でないとします。つまり，$x_1 \neq x_2$ とします。

いま，この直線の傾きを m とおくと，点 $(x_1,\ y_1)$ を通るから，方程式は

$y - y_1 = m(x - x_1)$　………①　➜ 1 点と傾きの与えられた直線の方程式

と表されますね。

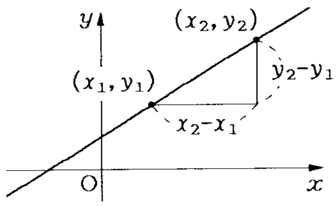
そして，この直線は点 $(x_2,\ y_2)$ も通りますから

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$　➜①で，$x = x_2$，$y = y_2$ とおく。

です。これを m について解くと

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

➜ $x_1 \neq x_2$ だから，両辺を $x_2 - x_1 (\neq 0)$ で割ります。



だから，求める直線の方程式は次のようになります。

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

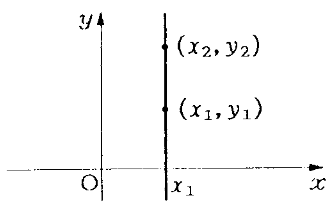
◇ y 軸に平行な場合

次に，この直線が y 軸に平行な場合を考えます。

つまり，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ で，$x_1 = x_2$ とします。

y 軸に平行な直線上の点の x 座標はいつも等しいので，求める直線の方程式は次のようになります。

$$x = x_1$$



◇ 2 点を通る直線の方程式

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は
>
> $x_1 \neq x_2$ のとき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
>
> $x_1 = x_2$ のとき　$x = x_1$

➜傾きが複雑な形の式で表されていますが，その規則性がわかれば，そんなに難しくありません。

$(x_2, y_2)\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_1, y_1)$

x_2が先なら，y_2も先の形です。

基本例題 2　　2点を通る直線の方程式

次の2点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1)　$(-2,\ -3)$，$(2,\ 5)$　　　(2)　$(4,\ -1)$，$(4,\ 8)$

◆考え方◆

2点の x 座標を比べて，等しくないときは $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ を，等しいときは $x=x_1$ を利用します。

◆解　答◆

(1)　2点 $(-2,\ -3)$，$(2,\ 5)$ を通るから　　➜ x 座標の等しくない2点です。

$$y-(-3)=\frac{5-(-3)}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$y+3=2(x+2)$$

$$y+3=2x+4$$

すなわち　　$y=2x+1$

(2)　2点 $(4,\ -1)$，$(4,\ 8)$ を通るから　　➜ x 座標の等しい2点です。

$$x=4$$

〈注意〉　(1)で，$x_1=2$，$y_1=5$，$x_2=-2$，$y_2=-3$ としても，同じ結果が得られます。

➜要領はわかりましたね。あとは，トレーニングあるのみです。

■■■トレーニング■■■

3　(0043)

次の2点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1)　$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$　　　(2)　$(-2,\ 3)$，$(2,\ -5)$

4　(0044)

次の2点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1)　$(-1,\ 6)$，$(-1,\ -1)$　　　(2)　$(5,\ 2)$，$(-7,\ 2)$

➜(2)は，x 軸に平行な直線になりますね。

5　(0045)

次の2点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1)　$(a,\ a^2)$，$(b,\ b^2)$　　ただし，$a \neq b$

(2)　$(a,\ a^3)$，$(a+b,\ a^3+b^3)$　　ただし，$b \neq 0$

➜ 2点を通る直線の方程式は求められるようになりましたね。次に，特別な2点を通る直線の方程式を求めてみましょう。

6 (0046)

2点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

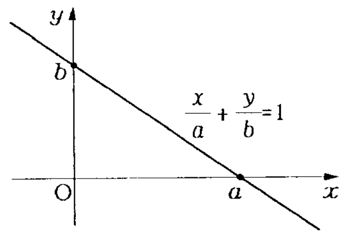
であることを証明しなさい。ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とします。

➜ どちらも原点ではなくて，1点は x 軸上にあり，他の1点は y 軸上にある場合ですね。

➜ この2点を通る直線の方程式も，公式としてまとめましょう。

2点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{ただし，} a \neq 0,\ b \neq 0$$



基本例題3 2点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式

2点 $(-3,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

与えられた2点の座標は $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ の形をしていますから，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ を利用します。

◆ 解　答 ◆

2点 $(-3,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を通るから

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$$　➜ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ で，$a=-3$，$b=4$ の場合です。

よって　$-4x+3y=12$

すなわち　$y=\dfrac{4}{3}x+4$　➜ $y=$ ～の形で表します。

➜ 0でない x 座標で x を割り，0でない y 座標で y を割ったものの和を1にするのですね。

■■■トレーニング■■■

7 (0047)

次の2点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1) $(5,\ 0)$，$(0,\ 2)$　　(2) $(0,\ 3)$，$(-2,\ 0)$

8 (0048)

次の２点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1) $(ab,\ 0)$，$(0,\ a^2)$　　ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$

(2) $(0,\ a+b)$，$(a-b,\ 0)$　　ただし，$a+b \neq 0$，$a-b \neq 0$

➔ここでは，方程式とグラフの関係から始まって，さまざまな直線の方程式の求め方を学習しました。これで終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 点$(x_1,\ y_1)$を通り，傾きmの直線の方程式は
   $y-y_1=m(x-x_1)$
2. ２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の方程式は
   $x_1 \neq x_2$のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
   $x_1=x_2$のとき　$x=x_1$
3. ２点$(a,\ 0)$，$(0,\ b)$を通る直線の方程式は
   $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　　ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$

§6　直線の方程式(2)　直線の一般形：$ax+by+c=0$

前回は，1点を通り傾きが与えられた場合や2点を通る場合など，いろいろな場合に分けて，直線の方程式を考えました。ここでは，どんな場合にもあてはまる直線の方程式を考えましょう。

➜これまでの直線の方程式についての知識を思い出しながら読みましょう。

〔1〕直線の方程式

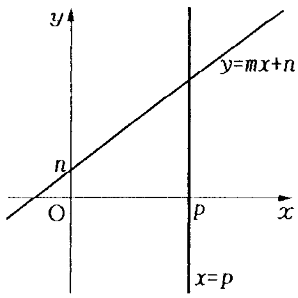
◇直線を表す方程式

平面上の直線は，y 軸に平行であるか，平行でないかのどちらかですね。
そして，これまでの学習でわかるように，それぞれの直線の方程式は

y 軸に平行なとき　　$x=p$　　………①

y 軸に平行でないとき　$y=mx+n$　　………②

という形で表されます。



ところで，上の①，②の方程式で，すべての項を左辺に移項すると

①は　$x-p=0$

②は　$-mx+y-n=0$

となり，どちらも，x，y についての1次方程式

$ax+by+c=0$　　ただし，$a\neq 0$ または $b\neq 0$　　………③

の形になっています。
つまり，直線は x，y についての1次方程式で表されます。

◇ x，y についての1次方程式の表す図形

では，逆に，x，y についての1次方程式③はどんな図形を表すのでしょうか。

③は，$b=0$ のとき，$a\neq 0$ だから　　$x=-\dfrac{c}{a}$　　………④

$b\neq 0$ のとき　　$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$　　………⑤

④のグラフは y 軸に平行な直線，⑤のグラフは y 軸に平行でない直線です。
いずれにしても，③の方程式のグラフは直線です。
つまり，x，y についての1次方程式は直線を表します。

◇直線の方程式

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

直線は，x，y についての1次方程式

$$ax+by+c=0 \qquad \text{ただし，} a \neq 0 \text{ または } b \neq 0$$

で表される。

逆に，x，y についての1次方程式は1つの直線を表す。

➜直線の方程式を $ax+by+c=0$ の形で表せば，y 軸に平行などの場合に分けて考える必要がなく，1つだけですみます。

次の例題では，与えられた方程式が直線を表すのはどんなときかを考えてみましょう。

例題1 　　直線の方程式

x，y についての方程式 $(k^2-1)x+(k^2+k-2)y+2=0$ が直線を表すのは，k の値がどんなときですか。

また，その直線が点 $(2,\ 1)$ を通るように，k の値を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

方程式 $ax+by+c=0$ が直線を表すのは，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ のときです。いいかえると，$a=0$ かつ $b=0$ のとき，直線を表しません。

だから，$a=0$ と $b=0$ からつくった連立方程式を解くと，その解以外のとき，直線を表すことになります。

また，直線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，これらの x 座標，y 座標を与えられた方程式の x，y にそれぞれ代入すると成り立ちます。このときの k の値で，上で求めた直線を表す場合にあてはまる値を求めます。

◆ 解　答 ◆

$(k^2-1)x+(k^2+k-2)y+2=0$ は

$$\text{連立方程式}\begin{cases} k^2-1=0 & \cdots\cdots\text{①} \\ k^2+k-2=0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

の解以外の k の値のとき，直線を表す。

この連立方程式を解く。

①から　$(k+1)(k-1)=0$

$k=-1,\ 1$

②から　$(k+2)(k-1)=0$

$k=-2,\ 1$

よって　$k=1$

➜①と②の連立方程式の解は，①の解と②の解に共通なものです。

したがって，直線を表すのは

$k \neq 1$ のとき　$\cdots\cdots$③

である。

この直線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき

$$(k^2-1)\cdot 2+(k^2+k-2)\cdot 1+2=0$$

➜ $ax+by+c=0$ が点 $(2,\ 1)$ を通る $\Longleftrightarrow a\cdot 2+b\cdot 1+c=0$

整理して　$3k^2+k-2=0$

$(k+1)(3k-2)=0$

よって　$k=-1,\ \dfrac{2}{3}$

これらは③を満たす。

➜このとき，与えられた方程式が直線を表すこと，すなわち③を満たすことを確かめます。

したがって，直線が点(2，1)を通るような k の値は

$$k=-1,\ \frac{2}{3}$$

➜便利な $ax+by+c=0$ の形も，ちょっと注意が必要ですね。
では，トレーニングです。

x の係数と y の係数が同時に０のときには，直線を表さないのですね。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0049)

x，y についての方程式 $(a^2-a-6)x-(a-3)y+7=0$ が直線を表すのは，a の値がどんなときですか。

また，その直線が点(1，-3)を通るように，a の値を定めなさい。

2 ＊ (0050)

x，y についての方程式 $(m^2+m-6)x+(m^2-m-12)y+10m=0$ が直線を表すのは，m の値がどんなときですか。

また，その直線が点(-1，4)を通るように，m の値を定めなさい。

➜もう，$ax+by+c=0$ の形の直線の方程式は，自由自在に扱えるようになりましたね。こんどは,3点が１直線上にあるとはどういうことか,直線の方程式を使って考えてみましょう。

基本例題１　１直線上にある３点

３点(1，4)，(-1，2)，(5，8)は１直線上にあることを示しなさい。

◆考え方◆

３点が１直線上にあるというのは，そのうちの２点を通る直線が残りの１点を通るということです。だから，まず２点を通る直線の方程式を求め，その方程式の x，y に残りの１点の x 座標，y 座標を代入すると，成り立つことを示します。

◆解　答◆

２点(1，4)，(-1，2)を通る直線の方程式は

$$y-4=\frac{2-4}{-1-1}(x-1)$$

$$y-4=x-1$$

すなわち　$y=x+3$　………①

①で，$x=5$ のとき　➜直線が，残りの１点を通ることを確かめます。

$$y=5+3=8$$

よって，直線①は点(5，8)を通る。

したがって，３点(1，4)，(-1，2)，(5，8)は１直線上にある。

➜考え方がわかったら，少しトレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0051)

次の3点は1直線上にあることを示しなさい。

(1) (2, −5), (−3, 10), (−4, 13)　　(2) (6, 4), (0, −1), (−12, −11)

4 ＊ (0052)

次の3点が1直線上にあるように，定数 a の値を定めなさい。

(1) $(3,\ -2)$, $(1,\ a)$, $(a,\ 0)$

(2) $(-1,\ 5)$, $(-5,\ a)$, $(3,\ a^2+2a)$

➜次の問題は，2点の x 座標が等しいかどうかで，場合に分けて考えましょう。

5 ＊ (0053)

3点 $(4,\ 5)$, $(2a,\ -7)$, $(a^2,\ -1)$ が1直線上にあるように，定数 a の値を定めなさい。

➜これで，ここでの学習は終わりです。学習したことをもう一度まとめて，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 直線は，x，y についての1次方程式

$$ax+by+c=0,\quad a\neq 0 \text{ または } b\neq 0$$

で表されます。

2. 逆に，x，y についての1次方程式

$$ax+by+c=0,\quad a\neq 0 \text{ または } b\neq 0$$

は，直線を表します。

§7　2直線の位置関係(1)　平行条件など

今回は，平面上の2直線の位置関係について学習します。単に2直線の位置関係なら，中学校でも学習しましたね。ここでは，2直線の位置関係を，その方程式を使って調べてみるのです。さらに，それぞれの位置関係にあるときの，2つの直線の方程式の係数の関係についても調べてみます。

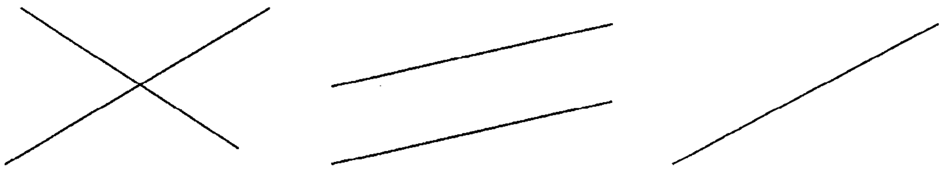
➜はじめに，2直線の位置関係を，その方程式を使って調べましょう。

〔1〕2直線の位置関係と方程式

◇2直線の位置関係

中学校で学習したように，平面上の2直線の位置関係は，1点で交わる，平行である，一致するの3つの場合に分かれます。

それは，共有点の数で考えると，それぞれ，1個，なし，無数ということです。



1点で交わる　……共有点は1個　　平行である　……共有点はなし　　一致する　……共有点は無数

◇2直線の位置関係を方程式で考える

前に学習したように，直線は，たとえば

$$2x-y+1=0 \quad \cdots\cdots\text{①} \qquad 3x+y+4=0 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

のように，x，y についての1次方程式で表すことができます。

そして，直線上の点は，その方程式を成り立たせる実数 x，y の組 (x, y) で表されます。

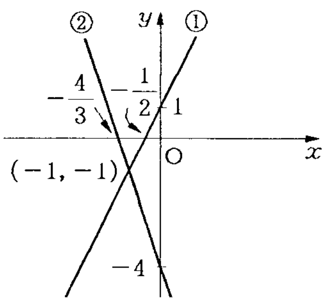
直線①上の点は①の実数解，直線②上の点は②の実数解です。

さらに，2直線の共有点は，そのどちらの直線上にもある点ですから，共有点の座標はそれらの方程式を連立方程式として解いて求められます。

上の①，②を連立方程式として解くと，$x=-1$，$y=-1$ という解が求められます。

つまり，直線①と②の共有点は1つ，いいかえると，直線①と②は1点で交わることがわかります。

右のように，グラフをかくと，確かに1点で交わっていますね。



このように，2直線の位置関係は，それを表す2つの方程式からつくった連立方程式の解の個数で，次のようになっています。

解が1つ　　………2直線は1点で交わる

解がない　　………2直線は平行である

解が無数にある　…2直線は一致する

➜連立方程式の解の個数で，2直線の位置関係がわかるのですね。さっそく，このことを使って調べてみましょう。

基本例題1　　2直線の位置関係(1)

次の2直線の位置関係を調べなさい。

(1)　$x+2y-2=0,\ 4x-y-2=0$　　(2)　$3x-2y+4=0,\ 6x-4y+5=0$

◆考え方◆

与えられた2直線の方程式を連立方程式として解き，その解の個数で次のように調べます。

解が1つ　……………　2直線は1点で交わる
解がない　……………　2直線は平行である
解が無数にある　……　2直線は一致する

◆解　答◆

(1)　$\begin{cases} x+2y-2=0 & \cdots\cdots\text{①} \\ 4x-y-2=0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

①＋②×2 から　　$9x-6=0$

$$x=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

③を①に代入して　　$y=\dfrac{2}{3}$

連立方程式①，②の解は1つだから，2直線は1点で交わる。

(2)　$\begin{cases} 3x-2y+4=0 & \cdots\cdots\text{①} \\ 6x-4y+5=0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

①×2－②から　　$3=0$

➜ $0\cdot x+0\cdot y+3=0$ ですが，これはどんな x，y の値についても成り立ちません。

連立方程式①，②の解はないから，2直線は平行である。

➜連立方程式を解くだけで，2直線の位置関係がわかるなんて愉快ですね。もっといろいろな場合について，トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1　(0054)

次の2直線の位置関係を調べなさい。

(1)　$x-3y+1=0$　……①　　$2x+y-5=0$　……②

(2)　$4x+2y+5=0$　……①　　$2x+y+3=0$　……②

(3)　$3x-2y+1=0$　……①　　$-9x+6y-3=0$　……②

2　(0055)

次の2直線の交点の座標を求めなさい。

(1)　$x+5y-6=0,\ 4x-y+4=0$　　(2)　$-3x+2y+8=0,\ 2x+5y+1=0$

3 (0056)

3直線 $2x+3y-1=0$ ………①，$3x-2y+5=0$ ………②，$7x-y+8=0$ ………③は1点で交わることを示しなさい。

➔こんどは，直線の方程式で，係数が変わると直線の位置関係がどのように変わるかを考えてみましょう。

例題1 2直線の位置関係(2)

2直線 $kx+2y=1$，$2x+ky=1$ の位置関係を調べなさい。

◆考え方◆

与えられた2直線の方程式 $kx+2y=1$ ………①，$2x+ky=1$ ………②を連立方程式とし，k の値によってその解の個数がどのようになるかを調べます。

そのために，まず①，②から，x を消去した1次方程式，y を消去した1次方程式をそれぞれ導きます。そして，その1次方程式 $aX=b$ の解は次のようになることを使って，解の個数を調べます。

$a\neq 0$ のとき	$X=\dfrac{b}{a}$
$a=0$，$b\neq 0$ のとき	解なし
$a=0$，$b=0$ のとき	解は無数

◆解　答◆

$$\begin{cases} kx+2y=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+ky=1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times k-$②$\times 2$ から　$(k^2-4)x=k-2$ ………③

②$\times k-$①$\times 2$ から　$(k^2-4)y=k-2$ ………④

(i) $k^2-4\neq 0$ のとき，すなわち $k\neq\pm 2$ のとき

③，④から　$x=\dfrac{1}{k+2}$，$y=\dfrac{1}{k+2}$

よって，連立方程式①，②の解は1つだから，2直線は1点で交わる。

(ii) $k^2-4=0$，$k-2\neq 0$ のとき，すなわち $k=-2$ のとき

➔連立方程式は $\begin{cases} -2x+2y=1 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$

③は　$0\cdot x=-4$

④は　$0\cdot y=-4$

よって，連立方程式①，②の解はないから，2直線は平行である。

➔ $0\cdot X=-4$ となる X の値はありません。

(iii) $k^2-4=0$，$k-2=0$ のとき，すなわち $k=2$ のとき

➔ 連立方程式は $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$

③は　$0\cdot x=0$

④は　$0\cdot y=0$

よって，連立方程式①，②の解は無数にあるから2直線は一致する。

➔ $0\cdot X=0$ は，X がどんな値でも成り立ちます。

〈注意〉 $k=2$ のとき，x，y ともに解は無数にありますが，これは連立方程式の解がどんな x，y の組に対しても成り立つということではありません。

①，②で，$k=2$ としたときの方程式 $2x+2y=1$ を満たす x，y の無数の組に対して成り立つということです。

➜ 1つの文字を消去して導いた1次方程式の係数で，場合分けして考えるのですね。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0057)
次の2直線の位置関係を調べなさい。
$kx+y=k+1$ ………① $x+ky=2$ ………②

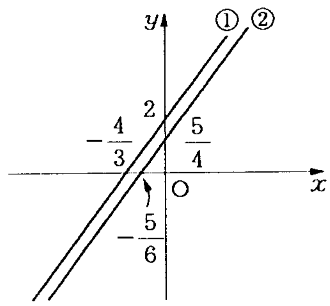
5 ＊ (0058)
次の2直線の位置関係を調べなさい。
$kx+4y=k-2$ ………① $x+ky=2$ ………②

➜ 2直線の位置関係を，連立方程式の解の個数から調べることはできるようになりましたね。では，次に，2直線が平行であることとそれらの方程式の係数の間の関係について考えてみましょう。

〔2〕2直線の平行条件

◇ 2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ の平行条件

基本例題1で調べたように
$3x-2y+4=0$ ………①
$6x-4y+5=0$ ………②
は平行な2直線を表します。



これらの方程式を変形すると

①は $y=\frac{3}{2}x+2$

②は $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$

で，2直線は傾きは等しく，y 切片は等しくありません。
このことからもわかるように，一般に，2直線
$y=mx+n$ ………③ $y=m'x+n'$ ………④
が平行であるとは，傾きが等しく，y 切片が等しくないこと，すなわち
$m=m'$, $n\neq n'$
であることです。
さらに，2直線③，④が一致するとは，傾きも y 切片も等しいこと，すなわち
$m=m'$, $n=n'$
であることです。
これらのことをまとめると，次のようになります。

2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ について 平行条件は $m=m'$，$n\neq n'$ 一致条件は $m=m'$，$n=n'$

◇2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ の平行条件

次に，2直線 $ax+by+c=0$ ………⑤，$a'x+b'y+c'=0$ ………⑥の平行条件を考えてみましょう。ここでは，係数はすべて0でないとします。

これらの方程式を変形して，傾きと y 切片を使った式で表すと，次のようになります。

⑤は $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$　　　⑥は $y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'}$

これより，2直線⑤，⑥の平行条件は

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\quad -\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$$

➜傾きが等しく，y 切片が等しくない。

すなわち　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

となります。

また，2直線⑤，⑥の一致条件は

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\quad -\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$$

➜傾きも y 切片も等しい。

すなわち　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

となります。

$\dfrac{a}{a'}$，$\dfrac{b}{b'}$，$\dfrac{c}{c'}$ は，$ax+by+c=0$ と $a'x+b'y+c=0$ の x の係数，y の係数，定数項の比です。

➜直線の平行条件はわかりましたね。では，このことを使って，与えられた直線に平行な直線の方程式を求めてみましょう。

基本例題2　　平行な直線の方程式

点 $(2,\ -5)$ を通り，直線 $3x-5y-1=0$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

◆考え方◆

平行な2直線の傾きは等しいから，まず与えられた直線の傾きを求め，次にこの傾きで，点 $(2,\ -5)$ を通る直線の方程式を求めます。

◆解　答◆

$3x-5y-1=0$ から　　$y=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{5}$

よって，この直線に平行な直線の傾きは　$\dfrac{3}{5}$

したがって，点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き $\dfrac{3}{5}$ の直線の方程式を求めると

$$y-(-5)=\frac{3}{5}(x-2)$$

すなわち　　$3x-5y-31=0$

➜直線の傾きが等しいというのは，直線の方程式で，x の係数どうし，y の係数どうしの比が等しいということですね。

--------• ちょっとひとこと •--------

◦　直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線 $a'x+b'y+c'=0$ の a'，b' は

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

であればよいのですから，$a'=a$，$b'=b$ とおくと

$ax+by+c'=0$ ………① ただし，$c\neq c'$

となります。

この直線が，点 $(p,\ q)$ を通るとき

$ap+bq+c'=0$，すなわち $c'=-ap-bq$

ですから，これを①に代入すると

$ax+by-ap-bq=0$

すなわち $a(x-p)+b(y-q)=0$ ………②

となります。

◦ 上の基本例題に，②の関係を使うと，求める直線の方程式は

$3(x-2)-5\{y-(-5)\}=0$

すなわち $3x-5y-31=0$

となります。

➜それでは，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0059)

点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $y=\dfrac{2}{3}x-4$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

7 (0060)

次の直線の方程式を求めなさい。

(1) 点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線 （福岡大）

(2) 点 $(1,\ 0)$ を通り，直線 $-5x+3y-1=0$ に平行な直線

8 (0061)

2点 $(2,\ 3)$，$(-2,-5)$ を通る直線に平行で，点 $(-1,3)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

➜与えられた直線に平行な直線の方程式は求められるようになりましたね。こんどは，与えられた2直線が平行になるように，係数を定めてみましょう。

例題2 2直線の平行条件

次のように，m の値を定めなさい。

(1) 2直線 $2x+3y+3=0$，$mx+(2m+1)y+4=0$ が平行である。

(2) 2直線 $mx+(m^2-1)y+1=0$，$3x+8y-9=0$ が一致する。

◆ 考え方 ◆

2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について，平行であるための条件は

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\qquad ただし，abc\neq 0,\ a'b'c'\neq 0$$

です。だから，$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ を満たす m の値で，$\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{c}{c'}$ であるものを求めます。

また，一致するための条件は

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$　ただし，$abc \neq 0$，$a'b'c' \neq 0$

です。

◆解　答◆

(1)　平行になる条件は　$\frac{m}{2}=\frac{2m+1}{3} \neq \frac{4}{3}$　➔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

$\frac{m}{2}=\frac{2m+1}{3}$ から　$3m=2(2m+1)$　➔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ を解きます。

よって　$m=-2$

このとき　$\frac{m}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \neq \frac{4}{3}$　➔ $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$ を確かめます。

したがって　$m=-2$

(2)　一致する条件は　$\frac{m}{3}=\frac{m^2-1}{8}=\frac{1}{-9}$　➔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$\frac{m}{3}=\frac{1}{-9}$ から　$m=-\frac{1}{3}$　………①　➔ $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$ を解きます。

$\frac{m^2-1}{8}=\frac{1}{-9}$ から　$9(m^2-1)=-8$　➔ $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ を解きます。

$$9m^2-1=0$$

$$(3m+1)(3m-1)=0$$

よって　$m=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}$　………②

①，②から　$m=-\frac{1}{3}$　➔共通な解を求めます。

➔ 2直線が $ax+by+c=0$ の形で与えられているときは，それぞれの係数の比で平行や一致がきまるのでしたね。トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

9 ＊ (0062)

2直線 $y=2x+3$，$y=(m^2+m)x+m+2$ が平行になるように，定数 m の値を定めなさい。

10 ＊ (0063)

2直線 $2x+3y-2=0$，$(a-2)x+(2a-1)y+5=0$ が平行になるように，定数 a の値を定めなさい。

11 ＊ (0064)

次の2直線が一致するように，m の値を定めなさい。

$$2x-y+4=0,\quad (m^2-2)x+(m-3)y+28=0$$

12 ＊ (0065)

2直線 $a^2x+(a+1)y+2=0$，$ax+(a^2-1)y+a=0$ が平行になるように，定数 a の値を定めなさい。

まとめておこう！

1.　2直線の位置関係は，それを表す2つの方程式からつくった連立方程式の解の個数で，次のようになっています。

　解が1つ……………2直線は1点で交わる

　解がない……………2直線は平行である

　解が無数にある……2直線は一致する

2.　2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ について

　平行 $\Longleftrightarrow m=m',\ n\neq n'$　　一致 $\Longleftrightarrow m=m',\ n=n'$

3.　2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について

　平行 $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$　　一致 $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

　ただし，$abc\neq0$，$a'b'c'\neq0$

➜ここでは，2直線の位置関係という図形の問題を，それらの直線の方程式を使って考えてみました。とても量が多くなりましたが，がんばりましたね。答え合わせがすんだら，終わりにしましょう。

§8　2直線の位置関係(2)　垂直条件など

前回は，2直線の位置関係と，その中でも特に，平行である，一致するの2つの場合について学習しましたね。ここでは，残りの，1点で交わる場合について，学習します。2直線の交点を通る直線の方程式や2直線が垂直に交わる条件などを考えます。

➜まず，2直線が1点で交わるとき，その交点を通る直線の方程式がどのようになるか考えましょう。

〔1〕2直線の交点を通る直線の方程式

◇定点を通る図形の方程式

たとえば，$y=-kx+2$ ………①は，変形すると $kx+(y-2)=0$ です。

そして，この方程式は，$x=0$，$y-2=0$ であれば，$k\cdot 0+0=0$ で，k の値にかかわらず成り立ちます。

つまり，直線①は，k がどんな値のときでも定点 (0，2) を通っています。

同じように，方程式

$$3x-5y-1+k(4x+y-4)=0 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

は，$3x-5y-1=0$，$4x+y-4=0$ であれば，k の値にかかわらず成り立ちます。

つまり，k がどんな値のときでも，直線 $3x-5y-1=0$ と $4x+y-4=0$ の交点を通る図形を表します。

そして，②を x，y について整理すると

$$(3+4k)x+(-5+k)y+(-1-4k)=0$$

で，$3+4k$ と $-5+k$ は同時には0になることはありませんから，②は直線を表します。

➜ $3+4k=0$，$-5+k=0$，つまり $k=-\dfrac{3}{4}$，$k=5$ が同時に成り立つことはありません。

◇2直線の交点を通る直線の方程式

一般に，直線 $ax+by+c=0$ と $a'x+b'y+c'=0$ が1点で交わるとき，その交点の座標は，方程式

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

を満たします。

そして，1点で交わるとき，平行でもなく，一致もしないのですから，$\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ です。

だから，③を x，y について整理した方程式

$$(a+a'k)x+(b+b'k)y+(c+c'k)=0$$

で，$a+a'k$，$b+b'k$ が同時に0になることはありません。

すなわち，③は直線を表します。

このことをまとめると，次のようになります。

2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が1点で交わるとき，
方程式

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \qquad k \text{は定数}$$

は，その交点を通る直線を表す。

＜注意＞　k の値をいろいろに変えると，交点を通る直線のうち $a'x+b'y+c'=0$ でないものは，すべてこの式で表されることがわかります。
　交点を通る直線のうち $a'x+b'y+c'=0$ だけは，この形で表せないことに注意しましょう。

➜ 2直線の交点がわからなくても，その交点を通る直線の方程式がわかるなんて，魔法のようですね。では，確かにそうであることを，次のトレーニングで確かめてみましょう。

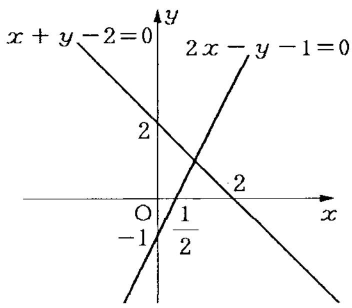
■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0066)

　2直線 $x+y-2=0$，$2x-y-1=0$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　2直線 $x+y-2=0$，$2x-y-1=0$ の交点の座標を求めなさい。

(2)　方程式 $x+y-2+k(2x-y-1)=0$ で，$k=-1$，0，1のときのグラフをかき，(1)で求めた交点を通ることを確かめなさい。



➜ 2直線の交点を通る直線の方程式は，とらえどころがないように感じるかもしれませんが，次の例題のような場合はとても役に立ちます。注意して読んでみましょう。

例題1　　2直線の交点を通る直線の方程式

　2直線 $2x-y-1=0$，$3x+2y-3=0$ の交点と，点 $(-1,\ 5)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

　与えられた2直線の交点を通る直線の方程式を，定数 k を使って

$$2x-y-1+k(3x+2y-3)=0$$

とします。

　次に，この直線が点 $(-1,\ 5)$ を通ることから，方程式に $x=-1$，$y=5$ を代入して k の値を求めます。

◆ 解　答 ◆

　与えられた2直線の交点を通る直線の方程式を，k を定数として

$$2x-y-1+k(3x+2y-3)=0 \quad \cdots\cdots①$$

とする。

　直線①が点 $(-1,\ 5)$ を通るためには

$$2\cdot(-1)-5-1+k\{3\cdot(-1)+2\cdot5-3\}=0$$

$$-8+4k=0$$

よって　　$k=2$

これを①に代入すると

$$2x-y-1+2(3x+2y-3)=0$$

すなわち　　$8x+3y-7=0$

➜要領はわかりましたね。さっそく，トレーニングをしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

2 ＊ (0067)

2 直線 $2x+3y+5=0$，$5x-4y+2=0$ の交点と，点 $(-6,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

3 ＊ (0068)

2 直線 $3x+2y+7=0$，$-x+5y+2=0$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

➜では，次に，2 直線が 1 点で交わる場合でも，とくに 2 直線が垂直になるときを考えましょう。

〔2〕2 直線の垂直条件

◇2 直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ の垂直条件

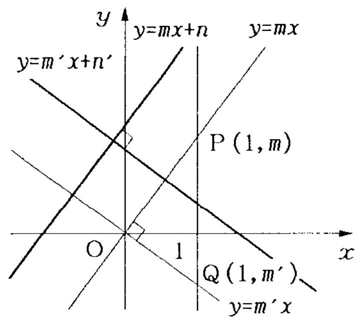
2 直線 $y=mx+n$ ………①，$y=m'x+n'$ ………②が垂直に交わる条件を求めてみましょう。

ここで，直線①，②ともに x 軸に平行でない，つまり $m\neq0$，$m'\neq0$ とします。

原点 O を通って，①，②に平行な直線を考えると

$y=mx$ ………③　　$y=m'x$ ………④

です。



そして，①と②が垂直になるときは，③と④が垂直になるときですから，①と②のかわりに，③と④が垂直になるための条件を考えます。

まず，直線③，④と，直線 $x=1$ との交点をそれぞれ P，Q とすると，P, Q の座標は $(1,\ m)$, $(1,\ m')$ になります。

そして，OP⊥OQ のとき，三角形 POQ は ∠POQ が直角の直角三角形ですから，三平方の定理より

$$PQ^2=OP^2+OQ^2 \quad ………⑤$$

すなわち　　$(1-1)^2+(m'-m)^2=(1^2+m^2)+(1^2+m'^2)$

展開して整理すると

$$m'^2-2m'm+m^2=2+m^2+m'^2$$

$$mm'=-1 \quad ………⑥$$　➜傾きの積が -1

逆に，⑥が成り立つと⑤が成り立ち，OP⊥OQ がいえます。

このことをまとめると，次のようになります。

2 直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ の垂直条件は $mm'=-1$　　ただし，$m\neq0$，$m'\neq0$

◇2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ の垂直条件

次に，2直線 $ax+by+c=0$ ………⑦, $a'x+b'y+c'=0$ ………⑧の垂直条件を考えてみましょう。ここでは，x, y の係数はすべて0でないとします。

これらの方程式を変形すると

⑦は　$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

⑧は　$y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'}$

だから，2直線⑦，⑧の垂直条件は

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$$　➜傾きの積が -1

分母をはらって整理すると

$$aa'+bb'=0$$

となります。

> $aa'+bb'$ は，
> $ax+by+c=0$ と
> $a'x+b'y+c'=0$
> の x の係数どうしの積と y の係数どうしの積の和です。

➜ここでは，a, a', b, b' がすべて0でないという前提で垂直条件 $aa'+bb'=0$ を導きましたが，この条件は a, a', b, b' の中に0になるものが含まれていても成り立ちます。

➜2直線の傾きの積が -1 になることが垂直条件なのですね。では，具体的な問題でこのことを利用してみましょう。

基本例題1　　　垂直な直線の方程式

点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 $3x-2y+5=0$ に垂直な直線の方程式を求めなさい。

◆考え方◆

垂直な2直線の傾きの積は -1 です。

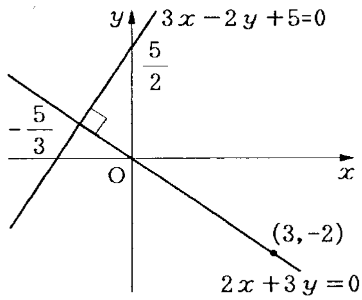
だから，まず，与えられた直線の傾きを求めます。そして，この傾きと積が -1 になる値を求め，その値を傾きとし，点 $(3,\ -2)$ を通る直線の方程式を求めます。

◆解　答◆

$3x-2y+5=0$ から　　$y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$

よって，この直線に垂直な直線の傾きは　$-\dfrac{2}{3}$

➜ $\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-1$



したがって，点 $(3,\ -2)$ を通り，傾き $-\dfrac{2}{3}$ の直線の方程式を求めると

$$y-(-2)=-\frac{2}{3}(x-3)$$

すなわち　　$2x+3y=0$

➜ $p\neq0$, $q\neq0$ とするとき，$\dfrac{q}{p}$ との積が -1 になる値は $-\dfrac{p}{q}$ ですね。

--------• ちょっとひとこと •--------

∘　直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線 $a'x+b'y+c'=0$ の a', b' は

$$aa'+bb'=0$$

であればよいのですから，$a'=b$，$b'=-a$ とおくと

$$bx-ay+c'=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

になります。

この直線が点 $(p,\ q)$ を通るとき

$$bp-aq+c'=0,\ \text{すなわち}\ c'=aq-bp$$

ですから，これを①に代入すると

$$bx-ay+aq-bp=0$$

すなわち　$b(x-p)-a(y-q)=0 \quad \cdots\cdots\cdots②$

となります。

∘　上の基本例題に②の関係を使うと，求める直線の方程式は

$$-2(x-3)-3\{y-(-2)\}=0$$

すなわち　$2x+3y=0$

となります。

➔与えられた直線に垂直な直線の方程式の求め方はわかりましたね。少しトレーニングして，より確実なものにしましょう。

■■■トレーニング■■■

4　(0069)

直線 $y=3x+2$ に垂直で，点 $(-4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

5　(0070)

次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　点 $(2,\ 5)$ を通り，直線 $4x+3y-10=0$ に垂直な直線　　（岐阜女子大）

(2)　点 $(-4,\ 1)$ を通り，直線 $2x-y-1=0$ に垂直な直線

6　(0071)

次の2点A，Bを通る直線に垂直で，点Cを通る直線の方程式を求めなさい。

(1)　A$(1,\ 3)$，B$(3,\ 6)$，C$(2,\ 5)$　　(2)　A$(-3,\ 1)$，B$(2,\ -3)$，C$(8,\ 7)$

➔与えられた直線に垂直な直線の方程式は求められるようになりましたね。こんどは，与えられた2直線が垂直になるように，係数を定めてみましょう。

例題2　　2直線の垂直条件

2直線 $x+my+(m-3)=0$，$mx+(m+2)y-2=0$ が垂直であるように，m の値を定めなさい。

◆考え方◆

2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ の垂直条件は

$$aa'+bb'=0$$

です。

◆解　答◆

垂直になる条件は　$1\cdot m+m\cdot(m+2)=0$　→ $aa'+bb'=0$

$$m^2+3m=0$$

$$m(m+3)=0$$

したがって　$m=0,\ -3$

→ x の係数どうしの積，y の係数どうしの積を求め，それらを加えたものが0になるように，m の値を定めればよいのですね。

■■■トレーニング■■■

7 *（0072）

2直線 $y=-\dfrac{k+1}{4}x+\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{5}{k}x+\dfrac{7}{k}$ が垂直になるように，定数 k の値を定めなさい。

8 *（0073）

次の2直線が垂直であるように k の値を定めなさい。

(1)　$2x-y-2=0$，$3x-ky-4=0$

(2)　$3x-2y-1=0$，$kx+(k-1)y+8=0$

9 *（0074）

2直線 $kx+(k+1)y-2=0$，$(k+1)x+2y+3=0$ が垂直になるように，定数 k の値を定めなさい。

10 *（0075）

2直線 $x+3y-1=0$，$2x-5y+7=0$ の交点を通り，直線 $4x-5y+8=0$ に垂直な直線の方程式を求めなさい。

→ここまで理解できれば申し分ありません。もう少しがんばる気力のある人は，次のもっと力をつけようにトライしましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

11 *（0076）

A(1, 2)，B(4, 1) とするとき，線分 AB を 1：2 に内分する点 C を通り，AB に垂直な直線の方程式を求めなさい。

12 *（0077）

2直線 l_1，l_2 の方程式をそれぞれ $2x-3y-1=0$，$5x+4y-12=0$ とします。このとき，直線 $y=ax$ が l_1，l_2 の交点を通るように，a の値を定めなさい。

13 *（0078）

直線 $(a+3)x+(2a-1)y+7=0$ は，定数 a の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めなさい。

→与えられた直線の式を a について整理します。

$$(3x-y+7)+a(x+2y)=0$$

この式が a の値に関係なく成り立つのはどんなときかを考えましょう。

➜ここでは，2直線の交点を通る直線の方程式や，2直線の垂直条件について学習しました。これで終わりです。ごくろうさま。

まとめておこう！

1. 2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が1点で交わるとき，
方程式
$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \qquad k\text{は定数}$$
は，その交点を通る直線を表します。

2. 2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ の垂直条件は
$$mm'=-1 \qquad \text{ただし，} m\neq 0,\ m'\neq 0$$

3. 2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ の垂直条件は
$$aa'+bb'=0$$

§9　三角形の垂心・外心

これまで，直線の位置関係を，直線の方程式を使って調べたり，与えられた直線に平行な直線や，垂直な直線の方程式を求めたりしました。ここでは，これらのことを三角形に利用して，各頂点から対辺にひいた垂線や，各辺の垂直二等分線がどのような性質をもつか調べてみましょう。

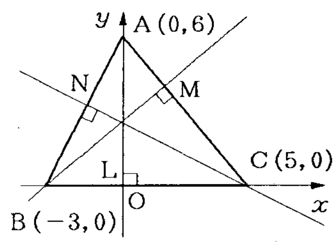
➜では，三角形の各頂点から対辺にひいた垂線の性質を調べることから始めます。

例題 1　　三角形の垂心

3点 A(0, 6)，B(−3, 0)，C(5, 0) を頂点とする△ABC の各頂点から対辺へひいた垂線は，1点で交わることを示しなさい。

◆ 考え方 ◆

Aから辺BCへひいた垂線をAL，
Bから辺CAへひいた垂線をBM，
Cから辺ABへひいた垂線をCN
とします。



そして，直線ALの方程式は，点Aを通り，BCに垂直であると考えて求めます。直線BM，CNの方程式も同じように考えて求めます。

この3つの垂線AL，BM，CNが1点で交わることを示すには，BM，CNの交点がAL上にあることを示します。

◆ 解　答 ◆

3頂点A，B，Cから，それぞれ辺BC，CA，ABへひいた垂線をAL，BM，CNとする。

2点C，Aを通る直線の傾きは　$\dfrac{6-0}{0-5}=\dfrac{6}{-5}=-\dfrac{6}{5}$

➜各頂点から対辺にひいた垂線の方程式を求めます。

直線BMは，点Bを通って，CAに垂直な直線だから，その方程式は

$$y-0=\frac{5}{6}\{x-(-3)\}$$

すなわち　$y=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{5}{2}$　………①

同じように，直線CNの方程式は

$y-0=-\dfrac{1}{2}(x-5)$　➜ABの傾きは　$\dfrac{0-6}{-3-0}=2$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$　………②

直線ALは，点Aを通って，BC，つまり x 軸に垂直な直線だから，その方程式は

$x=0$　………③

直線①，②の交点を求めると　点 $\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$　➜2つの垂線の交点を求めます。

この点は $x=0$ を満たすから，直線③上にある。

➜残りの垂線が上の交点を通ることを示します。

したがって，各頂点から対辺へひいた垂線は，1点で交わる。

〈注意〉　三角形の3つの頂点から対辺へひいた垂線の交点を垂心といいます。

➜垂線の方程式を3つも求めるので，少しめんどうですね。でも，そのめんどうな計算を1つ1つていねいにしていくだけで，けっしてむずかしくはありませんね。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0079)

△ABC の3つの頂点から対辺へひいた垂線は，1点で交わることを示しなさい。

➜ A(0, a)，B(b, 0)，C(c, 0)，$a \neq 0$，$b \neq c$ とおいて考えましょう。

2 ＊ (0080)

3点 A(0, 8)，B(−5, 0)，C(3, 0) を頂点とする△ABC の垂心の座標を求めなさい。

➜各頂点からの3つの垂線は必ず1点で交わりますから，垂線は2つだけ考えて，その交点を求めれば垂心が求められます。

➜三角形の各頂点から対辺へひいた垂線は，どんな三角形でも必ず1点で交わることがわかりましたね。では，こんどは，三角形の各辺の垂直二等分線について調べてみましょう。

例題2　　三角形の外心

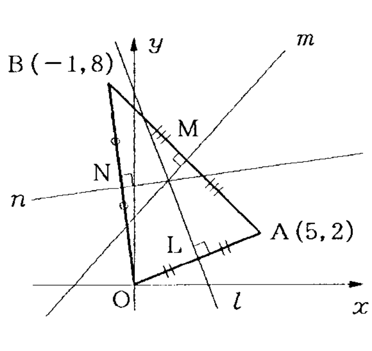
3点 O(0, 0)，A(5, 2)，B(−1, 8) を頂点とする △OAB の各辺の垂直二等分線は，1点で交わることを示しなさい。

◆ 考え方 ◆

辺 OA，AB，BO の垂直二等分線をそれぞれ l，m，n とします。また辺 OA，AB，BO の中点をそれぞれ L，M，N とします。

まず，l の方程式を，L を通り，OA に垂直な直線と考えて求めます。直線 m，n の方程式も同じように考えて求めます。

この3つの垂直二等分線 l，m，n が1点で交わることを示すには，m，n の交点が l 上にあることを示します。



◆ 解　答 ◆

辺 OA，AB，BO の中点をそれぞれ L，M，N とすると

$$L\left(\frac{5}{2},\ 1\right),\quad M(2,\ 5),\quad N\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$$

また，辺 OA，AB，BO の垂直二等分線をそれぞれ l，m，n とおく。

2点 O，A を通る直線の傾きは　$\dfrac{2}{5}$

直線 l は，点 L を通って，OA に垂直な直線だから，その方程式は

$$y-1=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

➔各辺の垂直二等分線の方程式を求めます。

すなわち　$10x+4y-29=0$　………①

同じように，直線 m の方程式は　$y-5=x-2$　➔ＡＢの傾きは　-1

すなわち　$x-y+3=0$　………②

直線 n の方程式は　$y-4=\frac{1}{8}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$　➔ＢＯの傾きは　-8

すなわち　$2x-16y+65=0$　………③

直線②，③の交点を求めると　点$\left(\frac{17}{14},\ \frac{59}{14}\right)$

➔２つの垂直二等分線の交点を求めます。

この点の x 座標，y 座標を①の x，y に代入すると

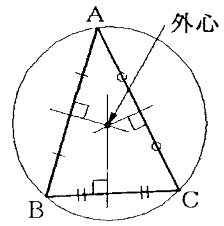
$$\text{左辺}=10\cdot\frac{17}{14}+4\cdot\frac{59}{14}-29=0,\quad \text{右辺}=0$$

だから，点$\left(\frac{17}{14},\ \frac{59}{14}\right)$は直線①上にある。

➔残りの垂直二等分線が上の交点を通ることを示します。

したがって，△ＯＡＢの各辺の垂直二等分線は，１点で交わる。

〈注意〉　△ＡＢＣにおいて，右の図のように，各頂点Ａ，Ｂ，Ｃを通る円を△ＡＢＣの外接円といいます。外接円の中心を外心といい，これは各辺の垂直二等分線の交点になっています。



➔３辺の垂直二等分線の方程式さえわかれば，あとは連立方程式を解くだけですから，簡単ですね。では，線分の垂直二等分線の方程式を求めるトレーニングから始めましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0081)

次の２点Ａ，Ｂについて，線分ＡＢの垂直二等分線の方程式を求めなさい。

(1)　Ａ(3, 0)，Ｂ(5, −4)　　(2)　Ａ(−1, 3)，Ｂ(−6, 3)

4 ＊ (0082)

２点Ａ$(a_1,\ a_2)$，Ｂ$(b_1,\ b_2)$について，線分ＡＢの垂直二等分線の方程式を求めなさい。ただし，$a_1 \neq b_1$，$a_2 \neq b_2$とします。

5 ＊ (0083)

△ＡＢＣで，各辺の垂直二等分線は１点で交わることを証明しなさい。

➔座標軸のとり方をくふうしましょう。１つの辺と，その垂直二等分線を軸にとると，簡単になります。

6 ＊ (0084)

３点Ａ(4, −1)，Ｂ(−2, 5)，Ｃ(−4, −3)を頂点とする△ＡＢＣの外心の座標を求めなさい。

➔では，もう少しがんばってみたい人は，次のもっと力をつけように進みましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0085)

△ＡＢＣで，Ａ$(-4,\ 0)$，Ｂ$(5,\ 3)$で，しかも垂心が点Ｈ$(2,\ 4)$であるとき，頂点Ｃの座標を求めなさい。

➔ここでは，三角形の垂心と外心について学習しました。どちらもきちんと理解できましたね。では答え合わせをして，終わりにしましょう。

> まとめておこう！
>
> 1. 三角形の３つの頂点から対辺へひいた垂線は，１点で交わります。この交点を垂心といいます。
>
> 2. 三角形の各辺の垂直二等分線は，１点で交わります。この交点を外心といいます。

§10　点と直線との距離　直線に関して対称な点など

座標平面上の２点間の距離の求め方は，すでに学習しましたね。ここでは点と直線との距離の求め方を学習します。そして，それを利用して多角形の面積を求めてみましょう。また，さらに，直線に関して対称な２点の座標の関係を調べるなど，点と直線についていろいろ考えてみます。

➜まず，点と直線との距離の求め方を具体的な問題で考えてみましょう。

■■■トレーニング■■■

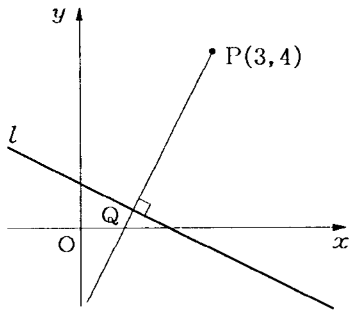
1　(0086)

点 P(3, 4) と直線 l : $x+2y-2=0$ との距離を，次の手順にしたがって求めなさい。

(1)　P から l へひいた垂線の方程式を求めなさい。

(2)　(1)で求めた垂線と，l との交点 Q の座標を求めなさい。

(3)　2点 P，Q 間の距離を求めなさい。



➜点 P と直線 l との距離とは，P から l へひいた垂線と l との交点を Q とすると，線分 PQ の長さのことですね。

➜うまく，点と直線との距離は求められましたね。このような手順をふめば，点と直線との距離はいつでも求められます。でも，少しめんどうですね。そこで，点の座標と直線の方程式がわかっているとき，点と直線との距離がどのように表されるか調べて，公式としてまとめましょう。

〔1〕点と直線との距離

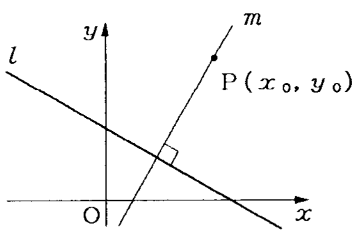
◇点 P$(x_0,\ y_0)$ から直線 l : $ax+by+c=0$ にひいた垂線 m

点 P$(x_0,\ y_0)$ と直線 l : $ax+by+c=0$ ………①
との距離を求めるために，まず P から l へひいた垂線 m の方程式を求めます。

$a \neq 0$，$b \neq 0$ のとき

①より，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ だから，l の傾きは

$-\dfrac{a}{b}$



よって，垂線 m の方程式は　$y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$

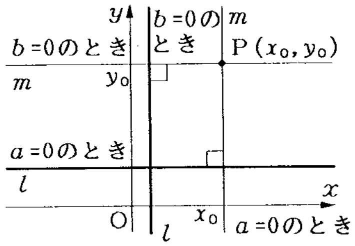
すなわち　$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$　………②

$a=0,\ b\neq 0$ のとき

①は $by+c=0$ だから，l は x 軸に平行な直線です。

よって，垂線 m の方程式は　　$x=x_0$

➜ y 軸に平行



$b=0,\ a\neq 0$ のとき

①は $ax+c=0$ だから，l は y 軸に平行な直線です。

よって，垂線 m の方程式は　　$y=y_0$

➜ x 軸に平行

ところで，②で，$a=0,\ b\neq 0$ とすると　　$x=x_0$

$b=0,\ a\neq 0$ とすると　　$y=y_0$

ですから，垂線 m は常に②で表されます。

◇ l と m の交点

では，次に，l とその垂線 m の交点 Q を求めてみましょう。

①×a＋②×b から　　$(a^2+b^2)x+ac-b^2x_0+aby_0=0$

①×b－②×a から　　$(a^2+b^2)y+bc+abx_0-a^2y_0=0$

ここで，$a^2+b^2\neq 0$ だから

$$x=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\quad y=\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}$$

したがって　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\ \dfrac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}\right)$

◇P と l との距離の公式

P と l との距離とは，線分 PQ の長さのことですね。そして，2点間の距離の公式から

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}&=\sqrt{\left(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}-y_0\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(\frac{-a^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-abx_0-b^2y_0-bc}{a^2+b^2}\right)^2}\\
&=\sqrt{\frac{(-a)^2(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{(-b)^2(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}\\
&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

このことをまとめると，次のようになります。

> 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離は
>
> $$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

➜点と直線との距離の公式では，直線の方程式は，必ず $ax+by+c=0$ の形で使います。それでは，この公式を使って点と直線との距離を求めてみましょう。

例題 1 　　点と直線との距離

点 (4, 2) と直線 $3x-4y=-5$ との距離を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

直線の方程式のすべての項を左辺に移項して，$ax+by+c=0$ の形に直します。

そして，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離の公式

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

にあてはめます。

◆ 解　答 ◆

$3x-4y=-5$ から　　$3x-4y+5=0$

➜直線の方程式を $ax+by+c=0$ の形に直します。

よって，点と直線との距離の公式から

$$\frac{|3\cdot4-4\cdot2+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|12-8+5|}{\sqrt{9+16}} \quad \rightarrow \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|9|}{\sqrt{25}}$$

$$=\frac{9}{5}$$

➜公式を使うと，点と直線との距離が簡単に求められますね。少しトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

2 * (0087)

次の点と直線との距離を求めなさい。

(1)　(3, 3), $-4x+3y-2=0$

(2)　(0, −5), $7x+1=0$

3 * (0088)

次の点と直線との距離を求めなさい。

(1)　(−3, −5), $y=\frac{2}{3}x$　　　　(2)　(5, 7), $x=-2$

➜次の問題では，まず 1 つの直線上の 1 点を求めましょう。

4 * (0089)

平行な 2 直線 $2x-y+2=0$ ………①, $2x-y-3=0$ ………②の間の距離を求めなさい。

➜点と直線との距離は求められるようになりましたね。では，このことを利用して，多角形の面積を求めてみましょう。

例題 2 　　多角形の面積

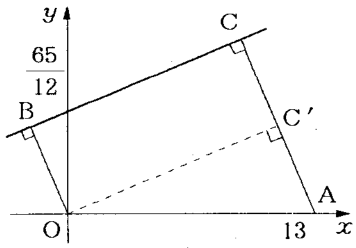
原点 O と点 A(13, 0) から直線 $5x-12y+65=0$ へひいた垂線と直線との交点をそれぞれ B, C とするとき，台形 OACB の面積を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

右の図からわかるように，台形ＯＡＣＢでは，ＯＢとＡＣが平行ですから，ＯＢ，ＡＣが上底，下底，ＢＣが高さです。

そして，ＯＢ，ＡＣは，それぞれ点Ｏ，Ａと直線ＢＣとの距離です。

また，点Ｃ′を線分ＡＣ上に，ＯＢ＝ＣＣ′になるようにとれば ＢＣ＝ＯＣ′ です。



このとき，△ＯＡＣ′は直角三角形だから，三平方の定理から

$$\mathrm{OC'}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AC'}^2}$$
$$=\sqrt{\mathrm{OA}^2-(\mathrm{AC}-\mathrm{CC'})^2}$$

です。

◆ 解　答 ◆

点と直線との距離の公式から

$$\mathrm{OB}=\frac{|5\cdot0-12\cdot0+65|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|65|}{\sqrt{169}}=\frac{65}{13}=5$$

$$\mathrm{AC}=\frac{|5\cdot13-12\cdot0+65|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|130|}{\sqrt{169}}=\frac{130}{13}=10$$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{OC'}=\sqrt{13^2-(10-5)^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$$

したがって，台形ＯＡＣＢの面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OB}+\mathrm{AC})\cdot\mathrm{BC}=\frac{(5+10)\cdot12}{2}=90$$

➜線分ＢＣの両端の点の座標を求めずに，その長さを求めるところが巧みですね。さあ，いろいろな知識をいかして，多角形の面積を求めてみましょう。

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0090)

3直線 $3x-y-1=0$ ………①，$2x+3y-8=0$ ………②，$x-4y-4=0$ ………③でつくられる三角形の面積を求めなさい。

6 ＊ (0091)

4直線 $x+2y-3=0$ ………①，$2x-y-7=0$ ………②，$x+4y+1=0$ ………③，$4x-y+6=0$ ………④でつくられる四角形の面積を求めなさい。

➜点と直線との距離の公式を知っていると，いろいろな多角形の面積が求められるものですね。こんどは，直線に関して対称な２点はどんな条件で表せるのか学習しましょう。

〔2〕直線に関して対称な点

◇直線に関して対称であるとは？

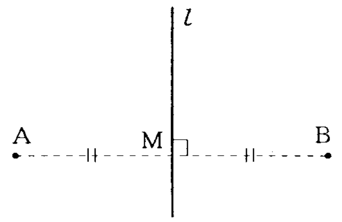
前に学習したように，直線 l の両側に2点A，Bがあって，l を折りめにして折り返すと重なるとき，A，Bは l に関して対称であるといいます。

そして，このとき，線分ABと l との交点をMとすると

$$AB \perp l, \quad AM = BM \quad \cdots\cdots①$$

です。

また，逆に，①がいえれば，A，Bは l に関して対称です。



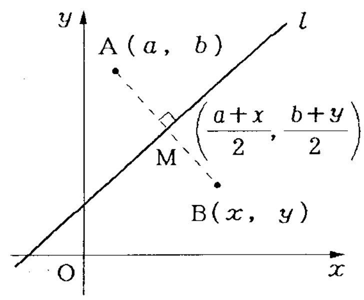
◇直線に関して対称な点の座標の関係

上のことから，直線 l に関して点Aに対称な点を求めるには，①の関係を満たす点Bを求めればよいのです。

ところで，①の関係をA，Bの座標ではどのようにして表したらよいでしょう。

$AB \perp l$ の関係は，直線ABと l との傾きの積が -1 ですね。

$AM = BM$ の関係は，単にこれだけでなく，ABと l との交点がMなのですから，Mは線分ABの中点で，しかも l 上の点であるということです。



➜では，さっそく，上のことを使って，直線に関して対称な点の座標を求めてみましょう。

例題3 直線に関して対称な点の座標

直線 $l : 6x-3y+4=0$ に関して，点 $A(0,\ 2)$ と対称な点Bの座標を求めなさい。

◆解　答◆

$B(a,\ b)$ とおく。

線分ABの中点の座標は　$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$

この点が直線 l 上にあるから　$6\cdot\dfrac{a}{2}-3\cdot\dfrac{2+b}{2}+4=0$

➜線分ABの中点が l 上にあること。

すなわち　$6a-3b+2=0$　$\cdots\cdots①$

また，l の傾きは2だから，l は x 軸に平行でない。

よって，これに垂直なABは y 軸に平行でないから　$a \neq 0$

そして，ABの傾きは　$\dfrac{b-2}{a-0}=\dfrac{b-2}{a}$

よって　$2\cdot\dfrac{b-2}{a}=-1$　➜$AB \perp l$ であること。

すなわち　$a+2b-4=0$　$\cdots\cdots②$

①，②を連立方程式として解いて　$a=\dfrac{8}{15}$，$b=\dfrac{26}{15}$

したがって，点 B の座標は　$\left(\frac{8}{15}, \frac{26}{15}\right)$

→ 2点が直線に関して対称になるには，2つの条件があって，そこから連立方程式をつくるのですね。では，いつものようにトレーニングです。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0092)
直線 l : $3x-4y-3=0$ に関して，点 A$(-2, 4)$ と対称な点 B の座標を求めなさい。

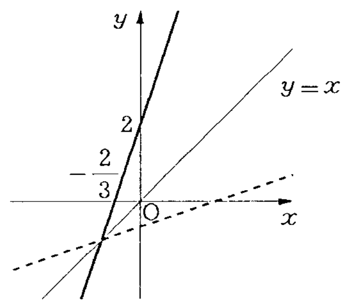
8 ＊ (0093)
直線 l : $2x-y-2=0$ に関して，点 A$(4, 1)$ と対称な点 B の座標を求めなさい。

→ ここまではできましたね。それでもうじゅうぶんですが，もう少し難しい問題を解いてみようかなという気のある人は，次のもっと力をつけように進みましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

9 ＊ (0094)
直線 $y=x$ に関して，直線 $y=3x+2$ と対称な直線の方程式を求めなさい。



→ 直線 $y=x$ に関して直線 $y=3x+2$ と対称な直線は，$y=x$ に関して $y=3x+2$ 上の点と対称な点の集合です。

→ ごくろうさま。これで，終わりです。もう一度，ここで学習したことをまとめましょう。

まとめておこう！

1. 点(x_0, y_0)と直線 $ax+by+c=0$ との距離は
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
2. 2点A，Bが直線 l に関して対称であるための条件は
① 直線ABと l が垂直。
② 線分ABの中点が l 上にある。

§11　円の方程式

中学校でも，円について学習しましたから，円がどんな図形かは覚えていますね。ここでは，円を座標平面上の点の集合と考えるとどんな方程式で表されるかを学習します。

➜まず，円についての復習をして，それから，方程式で表すことを考えましょう。

〔1〕円の方程式

◇円，中心，半径

前に学習したように，定点があって，そこから一定の距離にある点の集合が円です。

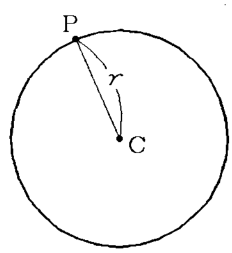
つまり，定点がＣ，一定の距離が r のとき

$\{P \mid CP=r\}$

が，円です。

このとき，定点Ｃを中心，一定の距離 r を半径といいます。

また，この円を，中心Ｃを使って，円Ｃともいいます。



◇円の方程式

では，平面上で，円の方程式はどのように表されるのか考えてみましょう。

たとえば，中心が $C(1,\ 3)$，半径が2の円上の点 $P(x,\ y)$ は，$CP=2$ を満たす点ですね。そして，この関係は，2点間の距離の公式から

$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=2$

と表されます。この両辺を平方すると

$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$

となります。

一般に，中心が $C(a,\ b)$，半径が r の円上の点を $P(x,\ y)$ とすると，上のように

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　………①

という関係が得られます。これが円の方程式です。

➜円の方程式は，中心と半径がわかれば，つくれるのですね。

とくに，原点を中心とする半径 r の円は，①で，$a=0$，$b=0$ の場合ですから

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$，すなわち $x^2+y^2=r^2$

です。これらをまとめると，次のようになります。

> 中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式は
>
> $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
>
> とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は
>
> $x^2+y^2=r^2$

➜円の方程式が，中心と半径からつくられることがわかりましたね。では，円の方程式から中心や半径を求めたり，中心や半径から円の方程式をつくったりしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0095)

次の円の中心と半径を求めなさい。

(1) $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$　　(2) $(x+5)^2+y^2=16$

(3) $x^2+y^2=4$

2 (0096)

次のように中心と半径が与えられた円の方程式を求めなさい。

(1) 中心 (1, 3)，半径 2　　(2) 中心 (0, −2)，半径 5

(3) 中心 (0, 0)，半径 3

➜ここまでは，基本中の基本ですから，スラスラできましたね。では，次に，円の意味を考えて，少しくふうしてから円の方程式を求めてみましょう。

基本例題 1　中心と 1 点が与えられた円の方程式

中心が A(4, 2) で，点 B(2, 1) を通る円の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

中心はわかっていますが，半径がわかりませんから，まず半径を求めます。

半径は，中心と円上の点の距離ですから，この場合 AB です。

そして，中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式の公式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

にあてはめます。

◆ 解　答 ◆

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{(2-4)^2+(1-2)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

➜半径を求めます。

よって，この円は，中心 (4, 2)，半径 $\sqrt{5}$ だから，その方程式は

$$(x-4)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$$

➜右辺は $(\text{半径})^2$ です。

すなわち　$(x-4)^2+(y-2)^2=5$

〈注意〉　円の方程式では $(\text{半径})^2$ が使われますから，AB ではなく AB^2 を求めてもかまいません。

◆ 別　解 ◆

次のように，わからない半径を r として円の方程式をつくり，それが点 (2, 1) を通ることから，r を求める方法もあります。

◆ 解　答 ◆

この円の半径を r とすると，方程式は　$(x-4)^2+(y-2)^2=r^2$

この円は点 (2, 1) を通るから　$(2-4)^2+(1-2)^2=r^2$

よって　　$r^2=5$

したがって，求める円の方程式は　　$(x-4)^2+(y-2)^2=5$

➜中心と半径でわかっていないものがあったら，与えられた条件から，まずそれを求めるのですね。

■■■トレーニング■■■

3　(0097)

次の円の方程式を求めなさい。

(1)　中心が A$(-2,\ 4)$ で，原点 O を通る。

(2)　中心が A$(-3,\ 5)$ で，点 B$(1,\ 0)$ を通る。

4　(0098)

2点 A$(2,\ 1)$，B$(4,\ 7)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

5　(0099)

次の円の方程式を求めなさい。

(1)　中心が $(3,\ 4)$ で x 軸に接する円

(2)　中心が $(-2,\ 5)$ で y 軸に接する円

➜直線の方程式には，傾きで場合分けした表し方とどれにもあてはめられる表し方がありましたね。円の方程式では，これまで，中心と半径を使いましたが，別の表し方がないかどうか考えましょう。

〔2〕円と x，y についての2次方程式

◇円の方程式を x，y について整理して表す

前に学習したように，中心 $(1,\ 3)$，半径2の円の方程式は次のように表されますね。

$$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$$

これを展開して整理すると

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=4$$

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0$$

となります。

一般に，中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

を展開して整理すると，次のようになります。

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

ここで，$l=-2a$，$m=-2b$，$n=a^2+b^2-r^2$ とおくと

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots①$$

という，x^2 と y^2 の係数が等しく，xy の項を含まない x，y についての2次方程式になります。

◇x，y についての2次方程式が表す図形

たとえば，$x^2+y^2+4x-2y+5=0$ は，x^2 と y^2 の係数が等しく，xy の項を含みませんね。そして，これを変形すると，次のようになります。

$$(x+2)^2+(y-1)^2=0$$

(半径)$^2>0$ にならなければいけないのですが，右辺は0です。つまり，この方程式は円を

表しません。

ところで，x，y は実数ですから $(x+2)^2 \geqq 0$，$(y-1)^2 \geqq 0$ です。

したがって，この方程式を満たす x，y の値は $x=-2$，$y=1$ だけとなります。

つまり，この方程式は1点 $(-2,\ 1)$ を表しています。

また，たとえば，$x^2+y^2-2x-6y+14=0$ を変形すると，次のようになります。

$$(x-1)^2+(y-3)^2=-4$$

右辺の -4 は，実数の平方になることはできません。つまり，この方程式は表す図形がありません。

一般に，①を変形して，$(x+\square)^2+(y+\bigcirc)^2=\triangle$ の形にすると

$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2-n$$

すなわち　$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{l^2+m^2-4n}{4}$$

です。

この方程式より，上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> x，y についての2次方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は
>
> (1)　$l^2+m^2-4n>0$ のとき
>
> 中心 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$ の円を表す。
>
> (2)　$l^2+m^2-4n=0$ のとき
>
> 1点 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$ を表す。
>
> (3)　$l^2+m^2-4n<0$ のとき
>
> 表す図形がない。

→①の形の円の方程式では，中心や半径は一目ではわかりません。
ですから，x，y それぞれについての平方の形をつくるのですね。

基本例題2　x，y についての2次方程式の表す図形

次の方程式はどんな図形を表しますか。

(1)　$x^2+y^2+6x=0$　　(2)　$x^2+y^2-x-3y+3=0$

◆ 考え方 ◆

まず，与えられた方程式を $(x+A)^2+(y+B)^2=C$ ………①の形に直します。

そして，$(x+A)^2 \geqq 0$，$(y+B)^2 \geqq 0$ であることや，$(x+A)^2+(y+B)^2=0$ になるのは $x+A=0$，$y+B=0$ のときだけであることを使って，C の符号で，次のように場合分けします。

$C>0$ のとき，中心 $(-A,\ -B)$，半径 $\sqrt{C}$ の円

$C=0$ のとき，①を満たす x，y の値は $x=-A$，$y=-B$ のときだけだから，点 $(-A,\ -B)$

$C<0$ のとき，①を満たす x，y の値はない。つまり，どんな図形も表さない。

◆ 解　答 ◆

(1)　$x^2+y^2+6x=0$ を変形すると

$$(x^2+6x)+y^2=0$$
$$(x+3)^2+y^2=9$$

したがって，この方程式は

中心 $(-3,\ 0)$，半径3の円

を表す。

(2) $x^2+y^2-x-3y+3=0$ を変形すると

$$(x^2-x)+(y^2-3y)=-3$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

ここで，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$，$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\geqq 0$ だから，この方程式を満たす x，y の値はない。

したがって，この方程式は，どんな図形も表さない。

➔左辺を，x の完全平方式と y の完全平方式の和で表すのですね。

■■■トレーニング■■■

6 (0100)

次の方程式はどんな図形を表しますか。

(1) $x^2+y^2-6x-8y=0$

(2) $x^2+y^2+2y+3=0$

(3) $2x^2+2y^2+6x-10y+17=0$

(4) $(x+1)(x-2)+(y-1)(y-5)=0$

7 (0101)

方程式 $x^2+y^2-2x+4ky+2=0$ が円を表すように，定数 k の値の範囲を定めなさい。

➔与えられた方程式を

$$(x-a)^2+(y-b)^2=A$$

の形に直して，$A>0$ になるように k の値の範囲を定めます。

➔$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の形の2次方程式が円を表すのがどんな場合かわかりましたね。では，円がこの形の2次方程式で表されることを使って，3点を通る円の方程式を求めてみましょう。

基本例題3 3点を通る円の方程式

3点 $(5,\ -3)$，$(0,\ 2)$，$(-4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおいて，l，m，n の値を求めることを考えます。

この円が3点 $(5,\ -3)$，$(0,\ 2)$，$(-4,\ 0)$ を通ることから，l，m，n についての方程式を3つつくります。

そして，その3つの方程式を連立方程式として解いて，l，m，n の値を求めます。

◆ 解 答 ◆

円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

点 $(5,\ -3)$ を通るから

$$5^2+(-3)^2+l\cdot 5+m\cdot(-3)+n=0$$

すなわち　$5l-3m+n+34=0$　………①

点 (0, 2) を通るから

$$0^2+2^2+l\cdot 0+m\cdot 2+n=0$$

すなわち　$2m+n+4=0$　………②

点 (−4, 0) を通るから

$$(-4)^2+0^2+l\cdot(-4)+m\cdot 0+n=0$$

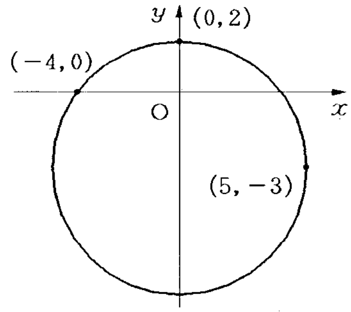
すなわち　$-4l+n+16=0$　………③

①, ②, ③を連立方程式として解くと

$$l=0,\ m=6,\ n=-16$$

したがって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2+6y-16=0$$



➜中心や半径のわからない形の円の方程式でも，このような場合には役立つのですね。

■■■トレーニング■■■

8　(0102)

次の３点を通る円の方程式を求めなさい。

(1)　(5, 3), (2, 4), (−2, −4)　　(2)　(1, 0), (2, $\sqrt{3}$), (3, −2)

➜最後に，中心が，ある直線上にあることから円の方程式を求めてみましょう。

例題 1　　中心の関係と２点が与えられた円の方程式

中心が直線 $y=x+1$ 上にあって，原点と点 (1, 0) を通る円の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおくと，中心の座標は

$\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$ です。

この中心が直線 $y=x+1$ 上にあることから，l, m についての方程式をつくります。

また，この円が原点と点 (1, 0) を通ることから，l, m, n についての方程式を２つつくります。

これらの３つの方程式を連立方程式として解いて，l, m, n の値を求めます。

◆ 解　答 ◆

円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

➜ $x^2+lx=\left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2-\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$

中心の座標は　$\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$

これが直線 $y=x+1$ 上にあるから

$$-\frac{m}{2}=-\frac{l}{2}+1,\ \text{すなわち}\ l-m-2=0\quad\cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を通るから

$0^2+0^2+l\cdot 0+m\cdot 0+n=0$

すなわち　　$n=0$　　………②

点 (1, 0) を通るから

$1^2+0^2+l\cdot 1+m\cdot 0+n=0$

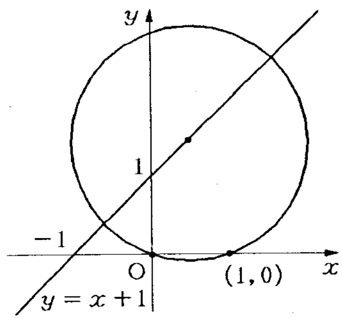
すなわち　　$l+n+1=0$　　………③

①，②，③を連立方程式として解くと

$l=-1,\ m=-3,\ n=0$

したがって，求める円の方程式は

$x^2+y^2-x-3y=0$



➜「円の中心は，弦の垂直二等分線上にある」ことに着目しても解けます。

原点と点 (1, 0) を結ぶ線分の垂直二等分線は，直線 $x=\frac{1}{2}$ ですね。

ですから，円の中心は，連立方程式$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=x+1 \end{cases}$ の解として求められます。

半径は，中心と原点または中心と点 (1, 0) の距離から求められますね。

また，上の解答では，円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおきましたが，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とおいてもかまいません。

どのようにおけば計算が楽になるかも考えて，次のトレーニングをやってみましょう。

■■■トレーニング■■■

9 * (0103)

中心が直線 $x-2y+2=0$ 上にあって，2点 (−2, 4)，(4, 6) を通る円の方程式を求めなさい。

10 * (0104)

中心が y 軸上にあり，2点 (7, 2)，(−5, 6) を通る円の方程式を求めなさい。

11 * (0105)

中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ で，点 (2, 1) を通る円の方程式を求めなさい。

12 * (0106)

円 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2-2=0$ が x 軸に接するとき，定数 a の値を求めなさい。

➜今回は，円の方程式について学習しました。答え合わせを忘れていませんね。それでは，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$x^2+y^2=r^2$

2. x，y についての2次方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は

$l^2+m^2-4n>0$ のとき

中心$\left(-\frac{l}{2},\ -\frac{m}{2}\right)$，半径$\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$の円を表す。

§ 12　図形の移動　$f(x,\ y)=0$ で表された図形の移動

これまで，点や直線，円などについて学習してきましたね。ここでは，これらの図形の移動を座標の関係で考えてみます。中学校で学習した移動について思い出しながら，学習を進めましょう。

➜まず，図形の平行移動についてまとめましょう。

〔1〕図形の平行移動

◇ $f(x,\ y)$，$P(x,\ y)$ の意味

整式は，1つの文字 f や P で表し，とくに $2x+5$，x^2-x+3 などが x についての整式であることを，$f(x)$，$P(x)$ と表しましたね。同じように，整式 $x-2y+3$ や $x^2+y^2-2x+9y+5$ が，x，y についての式であることをはっきり示すために

$$f(x,\ y)=x-2y+3,\quad P(x,\ y)=x^2+y^2-2x+9y+5$$

のように，かっこの中に文字 x，y を書いて表すこともあります。

そして，これらの整式で，たとえば $x=2$，$y=3$ のときの式の値を $f(2,\ 3)$，$P(2,\ 3)$ のように，x を2で，y を3でそれぞれおきかえて表します。

◇円の平行移動

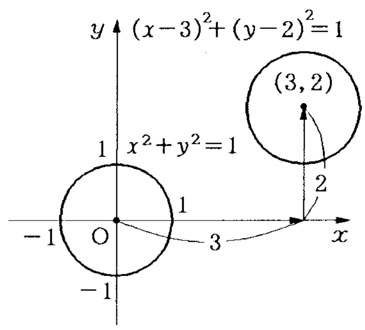
円 $x^2+y^2=1$………① を x 軸方向に3，y 軸方向に2だけ平行移動すると，中心 $(3,\ 2)$，半径は①に等しい1の円に移りますから，その方程式は次のようになります。

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②は，①で x を $x-3$，y を $y-2$ でおきかえたものになっています。

このように，円 $x^2+y^2=r^2$………③ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，中心 $(p,\ q)$，半径 r の円に移るので，その方程式は

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots④$$



となります。④は，③で x を $x-p$，y を $y-q$ でおきかえたものになっています。

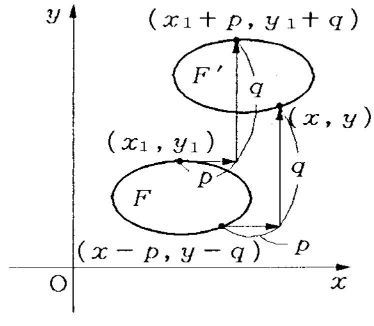
◇図形の平行移動

一般に，図形 F が方程式 $f(x,\ y)=0$………⑤で表されるとき，F を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形 F' の方程式について，調べてみましょう。

F 上の点 $(x_1,\ y_1)$ は，この平行移動によって F' 上の点 $(x_1+p,\ y_1+q)$ に移りますね。

だから，F' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は，$(x-p,\ y-q)$ です。

そして，この点 $(x-p,\ y-q)$ は F 上にあるのだから，⑤を満たします。



すなわち，$f(x-p,\ y-q)=0$ です。
これは，F' 上の点 $(x,\ y)$ の満たす方程式，すなわち図形 F' の方程式です。

➜図形を表す方程式と，その図形を平行移動した図形を表す方程式の関係はわかりましたね。実際に使ってみましょう。

例題 1 　　図形の平行移動

円 $x^2+y^2-2x+6y-5=0$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した円の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

図形 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形は，方程式

$$f(x-p,\ y-q)=0$$

で表されます。

いま，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 平行移動するのですから，x を $x-2$，y を $y-(-1)$ でおきかえて整理します。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-2x+6y-5=0$ で，x を $x-2$，y を $y-(-1)=y+1$ でおきかえると

$$(x-2)^2+(y+1)^2-2(x-2)+6(y+1)-5=0$$

すなわち　$x^2+y^2-6x+8y+10=0$

➜円 $x^2+y^2-2x+6y-5=0$ がどんな円を表しているのか調べなくても，それを平行移動した円の方程式は，文字をおきかえるだけで簡単に求められるのですね。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0107)

次の円を x 軸方向に 2，y 軸方向に -5 だけ平行移動した円の方程式を求めなさい。

(1) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$ 　　(2) $x^2+y^2-3x+6y-2=0$

2 ＊ (0108)

次の円は，円 $x^2+y^2=25$ ………①をどのように平行移動したものですか。

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 　　(2) $x^2+y^2+6x+4y-12=0$

3 ＊ (0109)

円 $x^2+y^2-2x+8y-13=0$ ………①を x 軸方向に a，y 軸方向に $2a$ だけ平行移動すると円 $x^2+y^2+12y+6=0$ ………②になるように，定数 a の値を定めなさい。

4 ＊ (0110)

円 $x^2+y^2=4$ を平行移動したもので，2 点 (2，-1)，(0，-3) を通る円の方程式を求めなさい。

5 ＊ (0111)

ある円を x 軸方向に 1，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものは，次の方程式で表されます。もとの円の方程式を求めなさい。

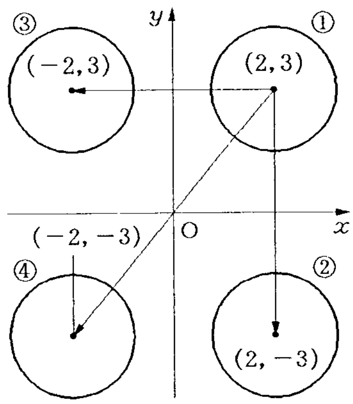
(1)　$x^2+y^2-6x+4y+4=0$　　　　(2)　$x^2+y^2+2x-2y-6=0$

➜図形の平行移動についてはわかりましたね。では，次に，図形を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動してみましょう。

〔2〕 x 軸，y 軸，原点に関する対称移動

◇円の対称移動

円 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$………①を x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称移動した円②，③，④がどんな方程式で表されるか考えてみましょう。



円①の中心 (2, 3) は，それぞれ

x 軸に関する対称移動では　(2, −3)

y 軸に関する対称移動では　(−2, 3)

原点に関する対称移動では　(−2, −3)

に移ります。

そして，半径はどの場合も①に等しくて 1 だから，その方程式は，それぞれ次のようになります。

②は　$(x-2)^2+(y+3)^2=1$

③は　$(x+2)^2+(y-3)^2=1$

④は　$(x+2)^2+(y+3)^2=1$

ここで，$(x+2)^2=\{-(x+2)\}^2=(-x-2)^2$，$(y+3)^2=\{-(y+3)\}^2=(-y-3)^2$ であることから

②の方程式は，①で y を $-y$ でおきかえたもの

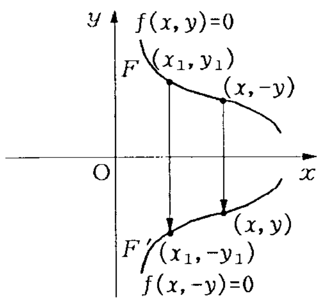
③の方程式は，①で x を $-x$ でおきかえたもの

④の方程式は，①で x を $-x$，y を $-y$ でおきかえたもの

と考えられます。

◇図形の対称移動

一般に，方程式 $f(x,\ y)=0$………⑤で表される図形 F を，x 軸に関して対称移動した図形 F' の方程式について調べてみましょう。



F 上の点 $(x_1,\ y_1)$ は，この対称移動によって F' 上の点 $(x_1,\ -y_1)$ に移りますね。

だから，F' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(x,\ -y)$ です。そして，この点 $(x,\ -y)$ は F 上にあるのだから，⑤を満たし，$f(x,\ -y)=0$ です。

これは，F' 上の点 $(x,\ y)$ の満たす方程式，すなわち図形 F' の方程式です。

同じようにして，F を y 軸に関して対称移動した図形 F''，原点に関して対称移動した図形 F''' を考えると

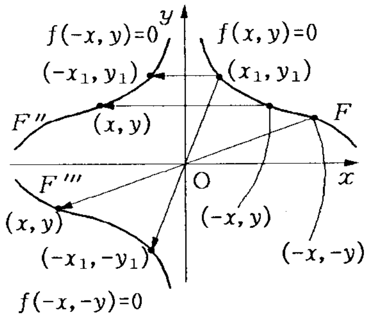
F'' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(-x,\ y)$ だから，F'' の方程式は

$f(-x,\ y)=0$

F''' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(-x,\ -y)$ だから，F''' の方程式は

$f(-x,\ -y)=0$

です。



以上のことをまとめると，次のようになります。

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を x 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(x,\ -y)=0$ y 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ y)=0$ 原点に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ -y)=0$

➜ x 軸，y 軸，原点に関する対称移動は，座標平面上では，x 座標，y 座標の符号の変化なのですね。

例題 2　図形の x 軸，y 軸，原点に関する対称移動

円 $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ を，次のように対称移動した円の方程式を求めなさい。

(1) x 軸に関して対称移動　(2) y 軸に関して対称移動　(3) 原点に関して対称移動

◆ 考え方 ◆

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を
x 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(x,\ -y)=0$
y 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ y)=0$
原点に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ -y)=0$
です。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-2x-6y+9=0$　………①

(1) ①で，y を $-y$ でおきかえると

$$x^2+(-y)^2-2x-6\cdot(-y)+9=0$$

すなわち　$x^2+y^2-2x+6y+9=0$

(2) ①で，x を $-x$ でおきかえると

$$(-x)^2+y^2-2\cdot(-x)-6y+9=0$$

すなわち　$x^2+y^2+2x-6y+9=0$

(3) ①で，x を $-x$，y を $-y$ でおきかえると

$$(-x)^2+(-y)^2-2\cdot(-x)-6\cdot(-y)+9=0$$

すなわち　$x^2+y^2+2x+6y+9=0$

➜ 何を何でおきかえればよいのかわからなくなったときは，図をかいて，その位置関係を調べてみましょう。

■■■トレーニング■■■

6 * (0112)

直線 $3x-5y+13=0$ を，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した直線の方程式を求めなさい。

7 * (0113)

次の円を，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した円の方程式を求めなさい。

(1) $(x+2)^2+(y-5)^2=4$　　(2) $x^2+y^2-3x+2y-4=0$

➜もう，x 軸，y 軸，原点に関する対称移動は理解できましたね。では次に，x 軸，y 軸に平行な直線や原点以外の点に関する対称移動について学習しましょう。

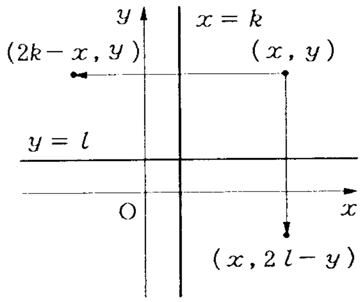
〔3〕$x=k$，$y=l$，点 $(m,\ n)$ に関する対称移動

◇直線 $x=k$，$y=l$ に関する点の対称移動

たとえば，点 A$(3,\ 2)$ を，直線 $x=1$ に関して対称移動した点 B の座標 $(X,\ Y)$ を調べてみましょう。

$x=1$ は y 軸に平行です。だから，A からこの直線に垂線をひくと，x 軸に平行な直線になり，B の y 座標 Y は A の y 座標に等しく 2 です。

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{3+X}{2},\ \dfrac{2+Y}{2}\right)$ が $x=1$ 上にあるから，$\dfrac{3+X}{2}=1$ です。



これから，$X=2\cdot1-3=-1$ で，B の座標は $(-1,\ 2)$ です。

このように，点 $(x,\ y)$ を直線 $x=k$ について対称移動すると，点 $(2k-x,\ y)$ に移ります。

➜対称移動した点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$\dfrac{x+X}{2}=k$ より　　$X=2k-x$

また　　$Y=y$

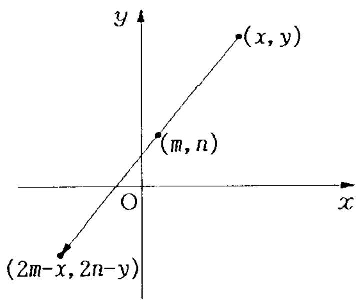
となりますね。

同じように，点 $(x,\ y)$ を直線 $y=l$ について対称移動すると，点 $(x,\ 2l-y)$ に移ります。

◇点 $(m,\ n)$ に関する点の対称移動

点 A$(1,\ 2)$ を点 M$(3,\ 4)$ に関して対称移動した点 B の座標を $(X,\ Y)$ とすると，M は線分 AB の中点だから

$$\frac{1+X}{2}=3,\qquad \frac{2+Y}{2}=4$$

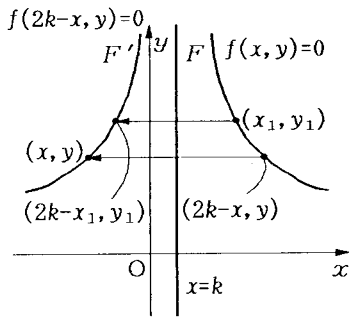


ここから，$X=2\cdot3-1=5$，$Y=2\cdot4-2=6$ です。

このように，点 $(x,\ y)$ を点 $(m,\ n)$ に関して対称移動すると，点 $(2m-x,\ 2n-y)$ に移ります。

◇図形の直線 $x=k$，$y=l$，点 $(m,\ n)$ に関する対称移動

方程式 $f(x,\ y)=0$………①で表される図形 F を，直線 $x=k$ に関して対称移動した図形 F' の方程式を調べてみましょう。



F 上の点 $(x_1,\ y_1)$ は，この対称移動によって，F' 上の点 $(2k-x_1,\ y_1)$ に移りますね。

だから，F' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(2k-x,\ y)$ です。

➜ $2k-x_1=x$ とすると，$2k-x=x_1$ です。

そして，この点 $(2k-x,\ y)$ は F 上にあるのだから，①を満たし，$f(2k-x,\ y)=0$ です。

これは，F' 上の点 $(x,\ y)$ の満たす方程式，すなわち図形 F' の方程式です。

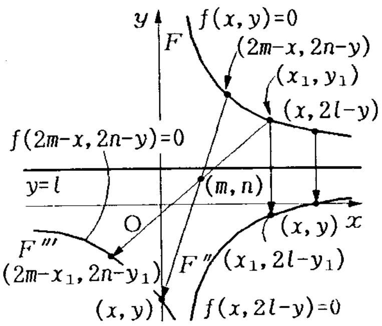
同じように，F を直線 $y=l$ に関して対称移動した図形 F''，点 $(m,\ n)$ に関して対称移動した図形 F''' を考えると，F'' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(x,\ 2l-y)$ だから，F'' の方程式は

$$f(x,\ 2l-y)=0$$

F''' 上の点 $(x,\ y)$ に移る F 上の点の座標は $(2m-x,\ 2n-y)$ だから，F''' の方程式は

$$f(2m-x,\ 2n-y)=0$$

です。



➜ x 軸，y 軸，原点は，直線 $y=l$，$x=k$，点 $(m,\ n)$ で $l=0$，$k=0$，$m=0$，$n=0$ の場合ですね。

➜ x 軸，y 軸，原点に関する対称移動より，複雑そうに見えますが，考え方は同じです。まず，点に利用してみましょう。

■■■トレーニング■■■

8 ＊ (0114)

次の点を，直線 $x=-1$，$y=3$，点 $(-2,5)$ に関して対称移動した点の座標を求めなさい。

(1) $(1,\ 8)$　　(2) $(-5,\ -7)$

➜こんどは，図形を直線や点に関して対称移動してみましょう。

例題 3　直線 $x=k$，$y=l$，点 $(m,\ n)$ に関する対称移動

円 $x^2+y^2-2x-5=0$ を，次のように対称移動した円の方程式を求めなさい。

(1) 直線 $x=2$ に関して対称移動　　(2) 直線 $y=-4$ に関して対称移動

(3) 点 $(3,\ -1)$ に関して対称移動

◆ 考え方 ◆

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を

直線 $x=k$ に関して対称移動した図形の方程式は　$f(2k-x,\ y)=0$

直線 $y=l$ に関して対称移動した図形の方程式は　$f(x,\ 2l-y)=0$

点 $(m,\ n)$ に関して対称移動した図形の方程式は　$f(2m-x,\ 2n-y)=0$

です。

◆ 解 答 ◆

$x^2+y^2-2x-5=0$　………①

(1) ①で，x を $2\cdot2-x=4-x$ でおきかえると

$$(4-x)^2+y^2-2\cdot(4-x)-5=0$$

すなわち　$x^2+y^2-6x+3=0$

(2) ①で，y を $2\cdot(-4)-y=-8-y$ でおきかえると

$$x^2+(-8-y)^2-2x-5=0$$

すなわち　$x^2+y^2-2x+16y+59=0$

(3) ①で，x を $2\cdot3-x=6-x$，y を $2\cdot(-1)-y=-2-y$ でおきかえると

$$(6-x)^2+(-2-y)^2-2\cdot(6-x)-5=0$$

すなわち　$x^2+y^2-10x+4y+23=0$

■■■トレーニング■■■

9＊ (0115)

直線 $2x-6y+5=0$ を，次の直線や点に関して対称移動した図形の方程式を求めなさい。

(1)　$x=5$　　(2)　$y=-1$　　(3)　$(-3,\ 4)$

10＊ (0116)

円 $x^2+y^2-x+4y-5=0$ を，次の直線や点に関して対称移動した図形の方程式を求めなさい。

(1)　$x=5$　　(2)　$y=-1$　　(3)　$(-3,\ 4)$

11＊ (0117)

直線 $2x-y+1=0$ ………①を点 $(3a,\ a)$ に関して対称移動したところ，直線 $2x-y+9=0$ ………②になりました。a の値を求めなさい。

➜最後は，こんな問題です。

12＊ (0118)

円 $x^2+y^2-4x+2y-1=0$ ………①の，直線 $x-2y+1=0$ ………②に関して対称な円の方程式を求めなさい。

➜円①の中心に着目します。この中心の，直線②に関する対称点を求めます。
ここでは，図形の移動を，座標の関係で調べました。もう一度まとめて終わりにしましょう。

まとめておこう！

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される図形を

1. x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形の方程式は
$$f(x-p,\ y-q)=0$$
2. x 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(x,\ -y)=0$
y 軸に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ y)=0$
原点に関して対称移動した図形の方程式は　$f(-x,\ -y)=0$
3. 直線 $x=k$ に関して対称移動した図形の方程式は
$$f(2k-x,\ y)=0$$
直線 $y=l$ に関して対称移動した図形の方程式は
$$f(x,\ 2l-y)=0$$
点 $(m,\ n)$ に関して対称移動した図形の方程式は
$$f(2m-x,\ 2n-y)=0$$

§ 13　軌跡の方程式(1)　2定点からの距離がきめられた点Pの軌跡，アポロニウスの円

中学校で，ある条件を満たす点の集合がどのような図形になるかを調べたことがありますね。今回から2セクションは，これを，座標平面上で，座標の間に成り立つ方程式の関係を使って調べてみます。距離の公式や分点の座標の公式がひんぱんに出てきますから，使いこなせるようにしておきましょう。

➜さっそく，座標を使って，ある条件を満たす点の集合を表す方法を学習しましょう。

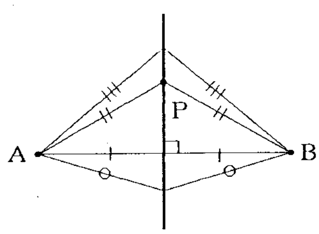
〔1〕軌跡と方程式

◇軌跡とは？

前に学習したように，2定点A，Bから等距離にある点の集合

$$\{P \mid AP=BP\}$$

は，線分ABの垂直二等分線になります。



これは，見方を変えると，点Pが条件AP＝BPを満たしながら動くとき，点Pのえがく図形が線分ABの垂直二等分線であるということです。

上の点Pのように，点がある条件を満たしながら動くとき，その点のえがく図形をその条件を満たす点の軌跡といいます。

また，定点A，Bに対して，Pのような動く点を動点といいます。

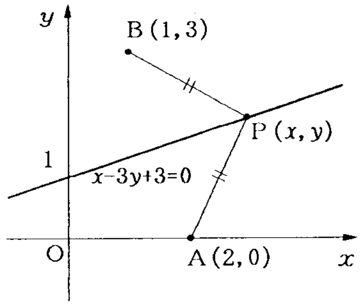
◇座標を使った軌跡の調べ方

座標平面上では，動点Pの座標を$(x,\ y)$として，与えられた条件から，点の軌跡をx，yについての方程式で表して，次のように調べることができます。

上の点A，Bの座標がそれぞれ$(2,\ 0)$，$(1,\ 3)$であるとしましょう。このとき，条件AP＝BPは

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

というx，yについての方程式で表されます。



①の両辺を平方して整理すると，次のようになります。

$$x-3y+3=0 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

条件を満たす点は，直線②上にあります。

逆に，直線②上の点$P(x,\ y)$をとると①が成り立ちます。

つまり，点PはAP＝BPを満足します。

したがって，求める軌跡は直線$x-3y+3=0$です。

一般に，与えられた条件を満たす点Pの軌跡が，図形Fであることを示すには

(1)　与えられた条件を満たす点は，図形F上にある。

(2)　図形F上のすべての点は，与えられた条件を満たす。

を証明します。上ではこの方法で示していますが，座標を用いたときには，計算を逆にたどることによって逆の成り立つことが明らかな場合が多いので，(2)の証明をふつう省略します。

➜軌跡の意味や座標を使って軌跡を調べる方法については理解できましたね。では，次の基本例題で実際に軌跡を求めてみましょう。

基本例題 1 　　　軌跡の方程式(1)

2点 A(2, 0), B(0, 1) について，$AP^2=BP^2+1$ を満たす点 P の軌跡を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

点 P の座標を $(x,\ y)$ とおきます。

そして，与えられた条件 $AP^2=BP^2+1$ を，x，y を使って表します。

つぎに，x，y についての方程式を整理し，どんな図形を表すか調べます。

◆ 解　答 ◆

$P(x,\ y)$ とすると，与えられた条件 $AP^2=BP^2+1$ は

$$(x-2)^2+y^2=\{x^2+(y-1)^2\}+1$$

展開して整理すると

$$-4x+2y+2=0$$

$$2x-y-1=0$$

したがって，点 P の軌跡は

直線 $2x-y-1=0$

である。

➜点 P の座標を $(x,\ y)$ とおいて，与えられた条件を x，y についての方程式に直すのですね。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0119)

2点 A(3, 1), B(0, 2) について，$AP^2+BP^2=10$ を満たす点 P の軌跡を求めなさい。

2 (0120)

3点 A(3, −2), B(2, −1), C(1, 0) について，$AP^2+BP^2=2CP^2$ を満たす点 P の軌跡を求めなさい。

3 (0121)

2定点 A, B について，$AP^2+BP^2=8$ を満たす点 P の軌跡を求めなさい。ただし，$AB<4$ とします。

➜座標軸を自分で適当にきめましょう。また，求めた方程式の表す図形と定点 A，B との関係もきちんと示しましょう。

➜点 P の満たす条件が式で表されているときの軌跡は求められるようになりましたね。では次に，条件がことばで表されているときを考えましょう。

基本例題 2 　　　軌跡の方程式(2)

2点 A(−2, 1), B(−3, 2) について，A，B からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

点 P の座標を $(x,\ y)$ とおきます。

そして，A，B からの距離の比が 2：1 であるという与えられた条件をまず式で表します。AP：BP＝2：1 となりますね。

次に，これを簡単にしてから，x，y を使って表し，整理します。最後に，それがどんな図形を表すか調べます。

◆ 解　答 ◆

$P(x,\ y)$ とする。

与えられた条件から　　AP：BP＝2：1

すなわち　　AP＝2BP

よって　　$\sqrt{\{x-(-2)\}^2+(y-1)^2}=2\sqrt{\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2}$

両辺を平方して整理すると

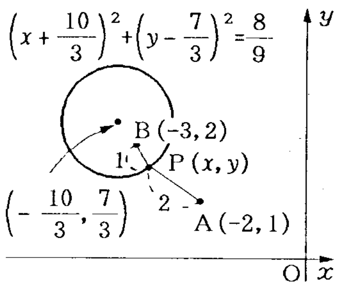
$$3x^2+3y^2+20x-14y+47=0$$

よって　　$\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

したがって，点 P の軌跡は

中心 $\left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の円

である。



➜ 2 定点からの距離の比が 2：1 である点の軌跡は円なのですね。

■■■トレーニング■■■

4　(0122)

2 点 A(0, 3)，B(−1, 0) について，A，B からの距離の比が 3：2 である点 P の軌跡を求めなさい。

5　(0123)

2 点 A(1, −2)，B(3, 1) について，A，B からの距離の比が 1：1 である点 P の軌跡を求めなさい。

6　(0124)

2 定点 A，B について，A，B からの距離の比が $m:n$ である点 P の軌跡を求めなさい。

➜ A(0, 0)，B(k, 0)，$k\neq 0$ として考えましょう。

--------• ちょっとひとこと •--------

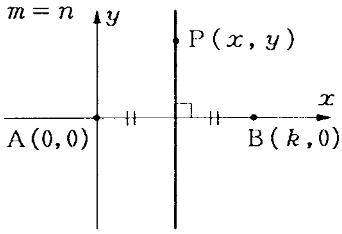
◦　一般に，2 定点 A，B からの距離の比が $m:n$ になる点の軌跡は

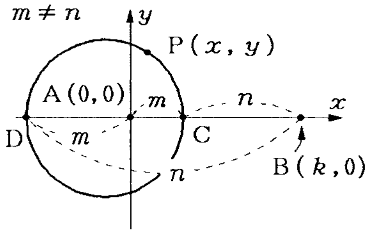
$m=n$ のとき　　線分 AB の垂直二等分線

$m\neq n$ のとき

線分 AB を $m:n$ に内分する点を C，$m:n$ に外分する点を D とすると，線分 CD を直径とする円

になります。





。 上で，$m \neq n$ のときの点 P の軌跡の円をアポロニウスの円といいます。

➜これまでは，2 定点や 3 定点からの距離が条件に与えられた場合を考えましたね。
今回の学習の最後に，2 直線からの距離が条件に与えられた場合を考えましょう。

7 (0125)

2 直線 $5x-5y+2=0$，$7x+y-4=0$ から等距離にある点 P の軌跡を求めなさい。

➜ごくろうさま。答え合わせをして終わりにしましょう。

§ 14　軌跡の方程式(2)　動点 P がある図形上を動く場合，媒介変数表示

前回は，動点についての条件が，定点や定直線からの距離の関係で与えられているときの軌跡を求めましたね。今回は，点 P が定直線や定円上を動くとき，P と定点を結ぶ線分を内分する点 Q の軌跡を求めてみましょう。

→まず，定直線と定点が与えられたときの軌跡を求めましょう。

例題 1　　軌跡の方程式(1)

点 P が直線 $2y-x-2=0$ 上を動くとき，点 A$(2,\ -3)$ と P を結ぶ線分 AP を $2:3$ に内分する点 Q の軌跡を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

動点 P，Q の座標を，文字を使ってそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x,\ y)$ とおきます。

そして，いま，Q の軌跡を求めるのですから，よけいな変数 x_1，y_1 を含まない，変数 x，y についての方程式を導きます。

ところで，点 Q は線分 AP を $2:3$ に内分するので

$$x=\frac{2\cdot x_1+3\cdot 2}{2+3},\quad y=\frac{2\cdot y_1+3\cdot(-3)}{2+3}\quad\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

また，点 P は直線 $2y-x-2=0$ 上の点だから

$$2y_1-x_1-2=0\quad\cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

です。

だから，Ⓐを x_1，y_1 について解き，Ⓑに代入すれば，Q の軌跡の方程式が求められます。

◆ 解　答 ◆

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおく。

P は直線 $2y-x-2=0$ 上の点だから

$$2y_1-x_1-2=0\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおく。

Q は線分 AP を $2:3$ に内分する点だから

$$x=\frac{2\cdot x_1+3\cdot 2}{2+3},\quad y=\frac{2\cdot y_1+3\cdot(-3)}{2+3}$$

すなわち　$x_1=\dfrac{5x-6}{2}$，$y_1=\dfrac{5y+9}{2}$

これを①に代入して　　→よけいな変数 x_1，y_1 を消去します。

$$2\cdot\frac{5y+9}{2}-\frac{5x-6}{2}-2=0$$

これを整理して

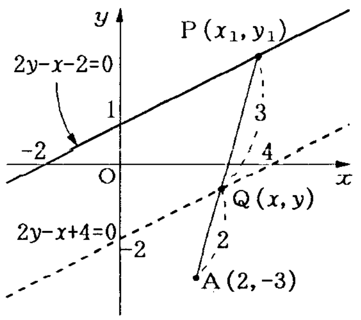
$$10y-5x+20=0$$

$$2y-x+4=0$$

したがって，点 Q の軌跡は

直線 $2y-x+4=0$

である。



→求めるものをきちんとおさえて，よけいな変数はすべて消去しましょう。

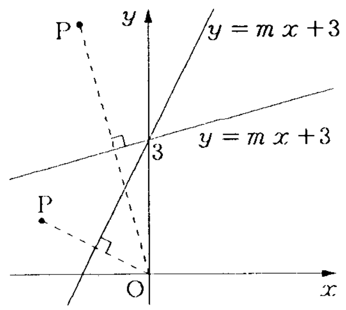
■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0126)

点 P が直線 $3x-4y-14=0$ 上を動くとき，点 A(2, 6) と P を結ぶ線分 AP を 3：1 に内分する点 Q の軌跡を求めなさい。

2 ＊ (0127)

直線 $y=mx+3$ に関して，原点 O と対称な位置にある点を P とします。m の値が変わるとき，P の軌跡を求めなさい。



→この場合は，直線上を点が動くのではなくて，直線そのものが動くのですね。

→これまでは，直線上に動点がある場合や直線が動く場合について調べました。こんどは，円上に動点がある場合について考えましょう。

例題 2　　軌跡の方程式(2)

点 P が円 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 上を動くとき，点 A$(-1,\ 2)$ と P を結ぶ線分 AP を 2：1 に内分する点 Q の軌跡を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

直線の場合と，ほとんどやり方は同じです。

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおいて考えましょう。

◆ 解　答 ◆

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおく。

P は円 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 上の点だから

$$x_1{}^2+y_1{}^2-6x_1-8y_1+21=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおく。

Q は線分 AP を 2：1 に内分する点だから

$$x=\frac{2\cdot x_1+1\cdot(-1)}{2+1},\quad y=\frac{2\cdot y_1+1\cdot 2}{2+1}$$

すなわち　$x_1=\dfrac{3x+1}{2}$，$y_1=\dfrac{3y-2}{2}$

これを①に代入して

$$\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3y-2}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3x+1}{2}-8\cdot\frac{3y-2}{2}+21=0$$

これを整理して

$$9x^2+9y^2-30x-60y+109=0$$

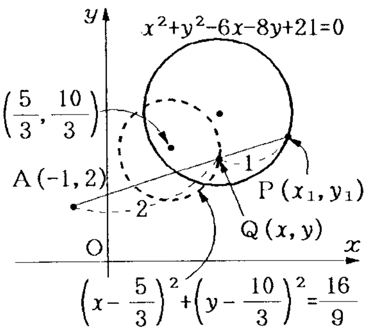
$$x^2+y^2-\frac{10}{3}x-\frac{20}{3}y+\frac{109}{9}=0$$

よって　$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

したがって，点 Q の軌跡は

中心 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{10}{3}\right)$，半径 $\frac{4}{3}$ の円

である。



➜それでは，トレーニングです。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0128)
点 P が円 $x^2+y^2-6x+12y+20=0$ 上を動くとき，点 A$(-2,1)$ と P を結ぶ線分 AP を 2 : 3 に内分する点 Q の軌跡を求めなさい。

4 ＊ (0129)
2 点 A$(2,\ 5)$，B$(-5,\ 4)$ があります。点 P が円 $x^2+y^2=16$ ………①上を動くとき，△ABP の重心 G の軌跡を求めなさい。

5 ＊ (0130)
点 P が円 $x^2+y^2+2x=0$ ………①上を動くとき，点 A$(2,\ 3)$ と P を結ぶ線分 AP を 1 : 3 に外分する点 Q の軌跡を求めなさい。

➜それでは，次に，動点 P についての条件がこれまでと少しちがう形で表されている場合を考えます。

〔1〕媒介(ばいかい)変数と軌跡

◇媒介変数

動点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めるために，条件を式に表すと

$x=2t$　　　$y=-6t+1$　　………①

のように，x，y 以外の変数で表されることが多くあります。

さらに，上の①の中の変数 t は，$t=1$ とおくと

$x=2\cdot1$　　　$y=-6\cdot1+1$

$=2$　　　　$=-5$

と，それに対応する x の値が 2，y の値が -5 と定まります。

つまり，点 P の座標 $(2,\ -5)$ が定まります。

この t のように，その値が定まれば，x，y の値が定まる，すなわち点 P$(x,\ y)$ も定まるような変数 t のことを媒介変数，またはパラメーターといいます。

媒介変数というのは，x，y の仲をとりもつ変数なのですね。

◇媒介変数で表された点の軌跡

では，動点 P$(x,\ y)$ の条件が，媒介変数 t を使って，上の①で表されたときの P の軌跡を考えてみましょう。

まず，①で表される点 $P(x,\ y)$ がどのような図形上にあるか調べてみます。

これまで学習したように，$P(x,\ y)$ の軌跡は $x,\ y$ の関係式でわかりますから，①から媒介変数 t を消去して $x,\ y$ だけの方程式を導きます。

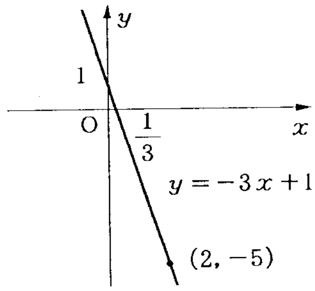
$x=2t$ から　　$t=\dfrac{x}{2}$　　➜消去したい t について解きます。

これを $y=-6t+1$ に代入すると　　➜残りの式に t を代入して消去します。

$$y=-6\cdot\frac{x}{2}+1,\ \text{すなわち}\ y=-3x+1$$

となります。

したがって，点 P は直線 $y=-3x+1$ ………②上にあります。



逆に，直線②上の点がすべて①の形に表されるかどうかを調べます。

直線 $y=-3x+1$ 上の点が①の形で表されるとすれば，$y=-6t+1$ ですから，次のようにおいてみます。

$$-3x+1=-6t+1$$

すると，$x=2t$ となりますから，確かに直線②上の点は①の形に表されます。

したがって，点 P の軌跡は直線 $y=-3x+1$ です。

➜媒介変数を使った表し方は，とても遠まわりな軌跡の表し方に思えるかもしれませんが，これから先，媒介変数を使うと簡単にすんでしまう問題がよく出てきますから，その扱い方に慣れておきましょう。

例題 3　　**媒介変数と軌跡**

座標平面上の点の集合

$$M=\{(x,\ y)\mid x=3t+1,\ y=6t+5,\ t\ \text{は実数}\}$$

は，どんな図形を表しますか。

◆ 考え方 ◆

点の集合 M が図形 F であることを示すには，次の(1), (2)を示さなければいけません。

(1) 集合 M に属する点が，図形 F 上にある。

(2) 図形 F 上の点は，集合 M に属する。

だから，まず $x=3t+1$，$y=6t+5$ から媒介変数 t を消去して，$x,\ y$ の関係式を導きます。次に，上で導いた $x,\ y$ の関係式を満たす $x,\ y$ は，$x=3t+1$，$y=6t+5$ の形で表されることを示します。

◆ 解　答 ◆

点 $(x,\ y)$ が M に属すると

➜集合 M に属する点がどのような図形上にあるか調べます。

$x=3t+1$　　………①

$y=6t+5$　　………②

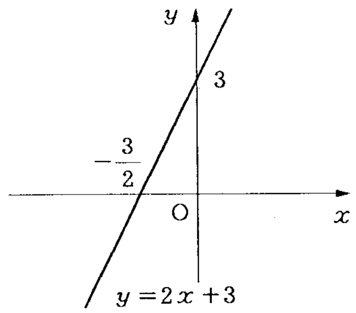
と表せる。

①から　　$t=\dfrac{x-1}{3}$

これを②に代入して

$$y=6\cdot\frac{x-1}{3}+5,\ \text{すなわち}\ y=2x+3$$

よって，M に属する点 $(x,\ y)$ は直線 $y=2x+3$ 上にある。



逆に，点 $(x,\ y)$ が直線 $y=2x+3$ 上にあれば

➜直線 $y=2x+3$ 上の点が M に属するかどうかを調べます。

$$x=3t+1$$

とおくと

$$y=6t+5$$

となる。

よって，直線 $y=2x+3$ 上の点 $(x,\ y)$ は M に属する。

したがって，集合 M は直線 $y=2x+3$ である。

➜媒介変数で表された点が，どのような図形上にあるかを調べるには，媒介変数を消去してしまえばいいのですね。少しトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0131)

座標平面上の点の集合

$$M=\{(x,\ y)\mid x=2t+3,\ y=4t-1,\ t\ \text{は実数}\}$$

は，どんな図形を表しますか。

7 ＊ (0132)

t を実数とするとき，点 $\mathrm{P}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上にあることを示しなさい。

8 ＊ (0133)

t が次のような値をとるとき，点 $\mathrm{P}(t+1,\ t-1)$ の軌跡の方程式を求め，そのグラフをかきなさい。

(1) すべての実数　　(2) $0\leqq t\leqq 1$

➜よくがんばりましたね。あと一息がんばってみる気力のある人は，次の問題に挑戦しましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

9 ＊ (0134)

k を実数とし，2直線 $l:y=kx+2,\ m:ky=2-x$ の交点を P とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) k がどんな値をとっても，直線 $l,\ m$ がそれぞれ通る定点 A，B の座標を求めなさい。

(2) $\angle\mathrm{APB}$ について，どんなことがいえますか。

(3) k がいろいろな値をとって変わるとき，点 P の軌跡を求めなさい。

➜ごくろうさま。それでは答え合わせをして終わりにしましょう。

§15　直線と円の位置関係　2点で交わる・接する・出会わない

これまでに，平面上の2直線の位置関係を，その方程式を使って調べることを学習しましたね。ここでは，これと同じようにして，直線と円の位置関係を方程式を使って調べてみます。

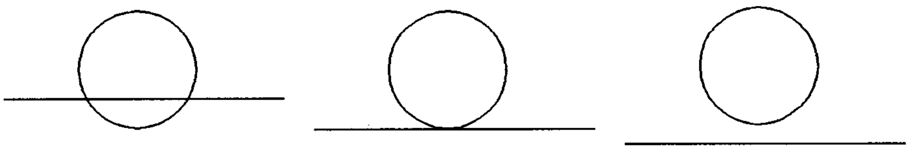
➜はじめに，直線と円の位置関係とその方程式の関係について考えましょう。

〔1〕直線と円の位置関係と方程式

◇直線と円の位置関係

中学校で学習したように，平面上の直線と円の位置関係は，2点で交わる，接する，出会わないの3つの場合に分かれます。

そして，それは，共有点の数で考えると，それぞれ2個，1個，なしということです。



2点で交わる　共有点は2個

接する　共有点は1個

出会わない　共有点はなし

◇直線と円の位置関係を方程式で考える

前に学習したように，直線や円は，たとえば

$x-y+2=0$　………①　　　$x^2+y^2-6=0$　………②

のように，それぞれ x，y についての1次方程式，2次方程式で表すことができます。

そして，直線や円の上の点は，その方程式の解である実数の組 $(x,\ y)$ で表されます。

さらに，直線と円の共有点は，そのどちらの上にもある点ですから，共有点の座標は，それらの方程式を連立方程式としたときの解から求められます。

上の①，②を連立方程式として解いてみましょう。

①から　　$x=y-2$　………①′

①′を②に代入して

$$(y-2)^2+y^2-6=0$$
$$2y^2-4y-2=0$$
$$y^2-2y-1=0$$

これを解くと　　$y=1\pm\sqrt{2}$

これと①′より，①と②の連立方程式は

$x=-1+\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$　または　$x=-1-\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$

という異なる2組の解をもつことがわかります。

つまり，直線①と円②の共有点は2つ，いいかえると2点で交わることになるわけです。

また，$x-y+4=0$ ………③と②を連立方程式として解いてみましょう。

③から　$x=y-4$　………③′

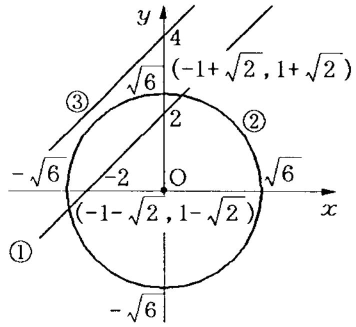
③′を②に代入して

$$(y-4)^2+y^2-6=0$$

$$y^2-4y+5=0$$

この2次方程式の判別式 D は

$$\frac{D}{4}=2^2-1\times5=-1<0$$



となるから，この2次方程式は解をもちません。

よって，③と②の連立方程式は解をもたないので，直線③と円②は出会いません。

このように，直線と円の位置関係は，それらを表す2つの方程式からつくった連立方程式の解によって，次のように判断できます。

異なる2組の解 ……… 2点で交わる
1組の解 ……… 接する
解なし ……… 出会わない

➜連立方程式の異なる解の個数で，直線と円の位置関係はわかるのですね。さっそく，このことを使って，直線と円の位置関係を調べてみましょう。

基本例題1　直線と円の位置関係と方程式

次の直線と円の位置関係を調べなさい。

(1)　直線 $y=x-2$，円 $x^2+y^2=2$

(2)　直線 $x-2y-8=0$，円 $x^2+y^2-2x-3=0$

◆考え方◆

与えられた直線と円の方程式を連立方程式として解き，その解の個数で，次のようになります。

異なる2組の解 ……… 2点で交わる
1組の解 ……… 接する
解なし ……… 出会わない

◆解　答◆

(1) $\begin{cases} y=x-2 & \cdots\cdots\text{①} \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

①を②に代入して　$x^2+(x-2)^2=2$

$$2x^2-4x+2=0$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

$$x=1$$

これを①に代入して　$y=-1$

よって，連立方程式①，②の解は1組だから，直線と円は接する。

(2) $\begin{cases} x-2y-8=0 & \cdots\cdots\text{①} \\ x^2+y^2-2x-3=0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

①から　$x=2y+8$　………③

③を②に代入して

$$(2y+8)^2+y^2-2\cdot(2y+8)-3=0$$

$$5y^2+28y+45=0$$

この2次方程式の判別式 D は

$$\frac{D}{4}=14^2-5\cdot45=-29<0$$

となるから，この2次方程式は解をもたない。

よって，連立方程式①，②は解をもたないから，直線と円は出会わない。

➜ 2直線の位置関係を調べるときは連立1次方程式を解きましたが，直線と円の位置関係を調べるときは連立2次方程式を解くのですね。

2直線の位置関係では，共有点をもたないことは，連立方程式が解なしになることでしたね。
円と直線でも同じことです。

■■■トレーニング■■■

1 (0135)

次の直線と円の位置関係を調べなさい。また，共有点をもつときは，その座標を求めなさい。

(1) 直線 $4x-3y-25=0$，円 $x^2+y^2=25$

(2) 直線 $y=2x+3$，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

(3) 直線 $x-2y+4=0$，円 $x^2+y^2+4x-2y-15=0$

〔2〕直線と円の位置関係の調べ方

◇直線 $y=mx+n$ と円 $x^2+y^2=r^2$ の位置関係

これまでの学習でわかるように，直線 $y=mx+n$ ………①と円 $x^2+y^2=r^2$ ………②との位置関係は，①，②の連立方程式の解の個数で調べられます。

ここで，$r>0$ とします。

①を②に代入すると

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

$$(1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と，x についての2次方程式になりますね。

そして，2次方程式では，わざわざ解かなくても，判別式を調べるだけで解の個数がわかります。

また，実数値 x に対して，①から，y も実数になります。

だから，③の判別式を D とおくと，①と②の連立方程式の解の個数，すなわち直線①と円②の位置関係が次のようにわかります。

$D>0$	……	異なる2組の解	……	直線と円は2点で交わる
$D=0$	……	1組の解	……	直線と円は接する
$D<0$	……	解なし	……	直線と円は出会わない

◇直線 $x=k$ と円 $x^2+y^2=r^2$ の位置関係

上で調べた直線は，y 軸に平行でない場合ですね。

こんどは，直線が y 軸に平行なとき，すなわち $x=k$ ………①′ で表されるときを考えます。

ここで，①$'$と②の位置関係は，x が k ときまっているので，y の値が存在するかどうかで調べます。

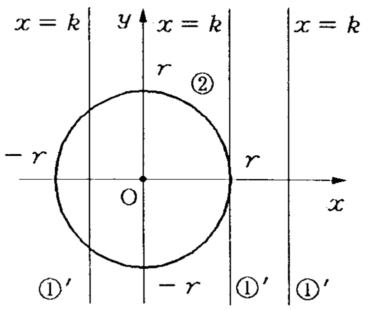
実際に，右の図のように，共有点をもつときともたないときがあります。

だから，このようなときは，①$'$を②に代入して

$$k^2+y^2=r^2,\ すなわち\ y^2+k^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots③'$$

という y についての2次方程式を導きます。

そして，③$'$の判別式を使って上の③の判別式と全く同様にして，直線①$'$と円②の位置関係を調べます。



◇直線と円の位置関係の調べ方のまとめ

これまで調べたことをもとに，直線と円の位置関係の調べ方を一般的にまとめると，次のようになります。

> 直線 $ax+by+c=0$ ………①と円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ ………②の位置関係は，①，②から y または x を消去して，残りの文字についての2次方程式を導き，その判別式を D とおくと
>
> $D>0 \iff$ 2点で交わる
>
> $D=0 \iff$ 接する
>
> $D<0 \iff$ 出会わない

➜では，直線と円の位置関係を，判別式を利用して調べてみましょう。

例題1 　　　　　　　　　　　　　　**直線と円の位置関係**

円 $x^2+y^2=3$ と次の直線の位置関係を調べなさい。

(1) $y=2x+k$ 　　　　　　(2) $y=kx-3$

◆ 考え方 ◆

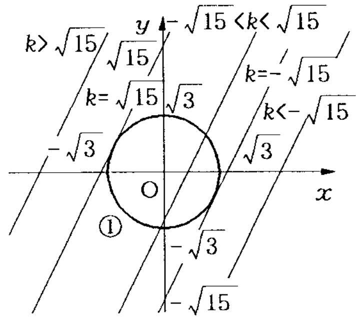
与えられた直線の方程式と円の方程式を連立方程式とし，k の値によって，その異なる解の個数がどのようになるか調べます。

そのために，2つの方程式から x または y を消去して，残りの文字についての2次方程式を導き，その判別式 D を使って次のように調べます。

$D>0$ のとき，2点で交わる　　$D=0$ のとき，接する　　$D<0$ のとき，出会わない

◆解　答◆

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=2x+k & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$



②を①に代入して　$x^2+(2x+k)^2=3$

$$5x^2+4kx+k^2-3=0$$

この２次方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5\cdot(k^2-3)$$
$$=-k^2+15$$

$-\sqrt{15}<k<\sqrt{15}$ のとき

$D>0$ だから，直線と円は２点で交わる。

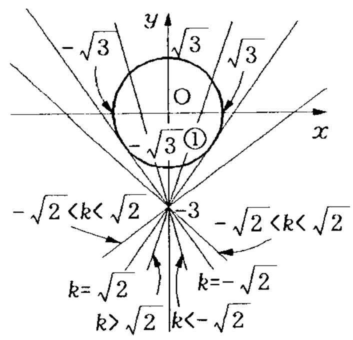
$k=\pm\sqrt{15}$ のとき

$D=0$ だから，直線と円は接する。

$k<-\sqrt{15}$，$\sqrt{15}<k$ のとき

$D<0$ だから，直線と円は出会わない。

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=kx-3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$



②を①に代入して　$x^2+(kx-3)^2=3$

$$(k^2+1)x^2-6kx+6=0$$

この２次方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(k^2+1)\cdot 6$$
$$=3k^2-6$$

$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$ のとき

$D>0$ だから，直線と円は２点で交わる。

$k=\pm\sqrt{2}$ のとき

$D=0$ だから，直線と円は接する。

$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき

$D<0$ だから，直線と円は出会わない。

〈注意〉　(1)では，直線の傾きは一定で，y 切片が変わり，$\pm\sqrt{15}$ は接するときの y 切片です。

(2)では，y 切片は一定で，傾きが変わり，$\pm\sqrt{2}$ は接するときの傾きです。

➜ １つの文字を消去して導いた２次方程式の判別式の符号で場合分けして，考えるのですね。

■■■トレーニング■■■

2 ＊ (0136)

次の直線と円の位置関係を調べなさい。

(1)　直線 $y=x+k$ ………①，円 $x^2+y^2=4$ ………②

(2)　直線 $2y+k=0$ ………①，円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ ………②

3 ＊ (0137)

次の直線と円の位置関係を調べなさい。

(1)　直線 $y=mx-3$ ………①，円 $x^2+y^2=2$ ………②

(2)　直線 $x=2k$ ………①，円 $x^2+y^2=36$ ………②

→直線と円の位置関係は調べられるようになりましたね。では，こんどは，円と直線が示された位置関係になるように，直線の位置や円の位置をきめてみましょう。

例題２　円や直線の位置の決定

直線 $y=-2x+a$ と円 $x^2+y^2=4$ が２点で交わるように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

与えられた直線の方程式と円の方程式から x または y を消去して，残りの文字についての２次方程式を導きます。

そして，その判別式 D を次のように使って，a についての方程式や不等式をつくり，解きます。

２点で交わるとき，$D>0$　　接するとき，$D=0$　　出会わないとき，$D<0$

◆ 解　答 ◆

$$\begin{cases} y=-2x+a & \cdots\cdots\cdots①\\ x^2+y^2=4 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して　$x^2+(-2x+a)^2=4$

$$5x^2-4ax+a^2-4=0$$

この２次方程式の判別式を D とおくと，直線①と円②が２点で交わるのは，$D>0$ のときである。

よって

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5\cdot(a^2-4)>0$$

$$-a^2+20>0$$

これを解いて　$-2\sqrt{5}<a<2\sqrt{5}$

→何もむずかしいことはありませんね。さあ，その勢いで，次のトレーニングもすませましょう。

■■■トレーニング■■■

4 ＊（0138）

直線 $y=x+a$ ………①と円 $x^2+y^2-2x-3=0$ ………②が次の位置関係になるように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

(1)　接する　　(2)　出会わない　　(3)　共有点をもつ

5 ＊（0139）

直線 $y=ax-3$ ………①と円 $x^2+y^2=1$ ………②が次の位置関係になるように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

(1)　２点で交わる　　(2)　出会わない　　(3)　接する

6 ＊（0140）

直線 $y=2x-3$ ………①と円 $x^2+y^2=k$ ………②が次の位置関係になるように，定数 k の値の範囲を定めなさい。ただし，$k>0$ とします。

(1)　２点で交わる　　(2)　出会わない

→がんばりましたね。ここまでの問題が解ければ，もうじゅうぶんです。まだ，がんばってみたい人は，次の少し発展した問題を解いてみましょう。

もっと力をつけよう

➜ここでは，発展的な内容ですが，とても利用価値のある『解と係数の関係』を使う問題を取り上げています。数学 B で学習する内容ですが，とても大切なので覚えておきましょう。

> 《解と係数の関係》
> 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を，α，β とするとき
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

《理由①》

$ax^2+bx+c=0$ の2つの解を，α，β とするとき，$D=b^2-4ac$ とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

《理由②》

$ax^2+bx+c=0$ の2つの解を，α，β とするとき

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

これより

$$-a(\alpha+\beta)=b,\qquad a\alpha\beta=c$$

よって

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

《例》

$2x^2-5x+3=0$ の2つの解を，α，β とするとき

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2},\qquad \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

➜では，問題に取りかかることにしましょう。なかなか難しいので，『解と係数の関係』をうまく使って解きましょう。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0141)

円 $x^2+y^2=4$ ………①が直線 $y=x+1$ ………②を切り取ってできる弦の長さを求めなさい。

➜円と直線との2つの交点を求めてもかまいませんが，少し計算が大変になります。2つの交点を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とおいて，解と係数の関係を利用しましょう。

8 * (0142)

傾き -1 の直線が円 $x^2+y^2=25$ ………①によって長さ4の弦を切り取られるとき，その方程式を求めなさい。

➜ごくろうさま。それでは，今回学習したことをもう一度まとめて，終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 円と直線の共有点の座標は，それらの方程式を連立方程式として解いたときの解で求められます。
2. 円と直線の位置関係は，それらを表す2つの方程式から，x または y を消去して，残りの文字についての2次方程式を導き，その判別式を D とおくと

$D>0 \iff$ 直線と円は2点で交わる。

$D=0 \iff$ 直線と円は接する。

$D<0 \iff$ 直線と円は出会わない。

§16　円の接線(1)　$x_0x+y_0y=r^2$

円と直線の位置関係を，方程式を使って調べることはできるようになりましたね。今回と次回は，その中の特別な場合である接するときで，円に接する直線の方程式を求めてみます。円の接線の求め方にはいろいろなものがあります。1つ1つ着実にマスターしましょう。

➜まず，原点を中心とする円で，接点が与えられたときの接線の方程式から考えましょう。

〔1〕円の接線の方程式(1)

◇接点が座標軸上にないとき

中学校で学習したように，円の接線は，接点を通る半径に垂直です。

このことを使って，原点Oを中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ ………①上の点 $P(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めてみましょう。ここで，$r>0$ とします。

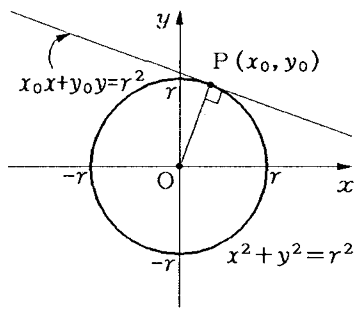
まず，接点Pが座標軸上にないとき，すなわち $x_0\neq0$，$y_0\neq0$ のときを考えます。

半径OPの傾きは $\dfrac{y_0}{x_0}$ だから，それに垂直な接線の傾きは $-\dfrac{x_0}{y_0}$ です。

そして，この接線は点 $(x_0,\ y_0)$ を通るから，その方程式は

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

となります。



この分母をはらって整理すると

$$x_0x+y_0y=x_0{}^2+y_0{}^2 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，点 $P(x_0,\ y_0)$ は円①上の点だから

$$x_0{}^2+y_0{}^2=r^2$$

です。これを②に代入すると，次のようになります。

$$x_0x+y_0y=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

◇接点が座標軸上にあるとき

次に，接点Pが座標軸上にあるときを考えます。

まず，y 軸上にあるとき，つまり $x_0=0$ のときです。

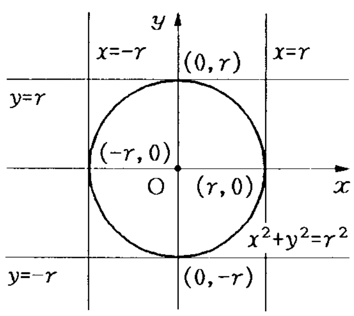
接点を求めると，$0^2+y_0{}^2=r^2$ から，$y_0=\pm r$ だから，Pの座標は $(0,\ r)$ または $(0,\ -r)$ です。

また，半径OPは y 軸上にありますから，それに垂直な接線は x 軸に平行です。

だから，この接線の方程式は次のようになります。

$$y=r \quad または \quad y=-r$$

これは，③に $x_0=0$，$y_0=r$ または $x_0=0$，$y_0=-r$ をあてはめたものになっています。



同じようにして，接点Pが x 軸上にあるとき，つまり $y_0=0$ のときを考えると，接線の

方程式は次のようになります。

$x=r$　または　$x=-r$

これは，③に $x_0=r$，$y_0=0$ または $x_0=-r$，$y_0=0$ をあてはめたものになっています。

◇接点が与えられたときの円の接線の方程式

ここまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における
> 接線の方程式は
> $$x_0x+y_0y=r^2$$

この公式は，接点の座標が与えられているときに使えるのですね。

➜この公式は，下のようにして覚えましょう。

$$x^2+y^2=r^2 \longrightarrow xx+yy=r^2 \longrightarrow x_0x+y_0y=r^2$$

接線は直線だから，x，y についての1次方程式になります。

➜接点が与えられたときの円の接線の方程式は，円の方程式によく似た形をしていますから覚えやすいですね。では，この公式を使って円の接線を求めてみましょう。

基本例題1　接点が与えられたときの円の接線の方程式(1)

円 $x^2+y^2=25$ で，次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) 点 $(3,\ -4)$　　(2) 点 $(0,\ 5)$

◆ 考え方 ◆

点 $(3,\ -4)$ も点 $(0,\ 5)$ も円 $x^2+y^2=25$ 上の点ですから，円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式の公式

$$x_0x+y_0y=r^2$$

を使います。

この公式に，与えられた円の方程式から r^2，与えられた点の x 座標から x_0，y 座標から y_0 の値を求めて代入します。

◆ 解　答 ◆

(1) 接線の方程式の公式から　$3\cdot x+(-4)\cdot y=25$

➜$x_0x+y_0y=25$ で，$x_0=3$，$y_0=-4$ の場合です。

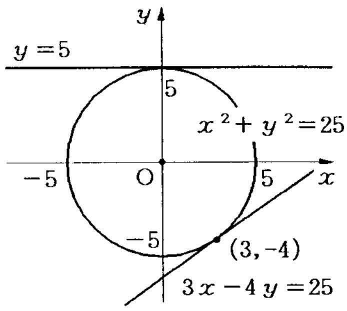
すなわち　$3x-4y=25$

(2) 接線の方程式の公式から　$0\cdot x+5\cdot y=25$

すなわち　$y=5$

〈注意〉 (1)は座標軸上にない点，(2)は y 軸上の点で，図に示すと右のようになります。

➜とても簡単ですね。でも油断してはいけません。きちんとトレーニングしましょう。



■■■トレーニング■■■

1 (0143)

円 $x^2+y^2=50$ で，次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $(-5,\ 5)$　　　　(2) $(5\sqrt{2},\ 0)$

2 (0144)

円 $x^2+y^2=10$ の接線で，次のようなものの方程式を求めなさい。

(1) 接点の x 座標が 1　　　　(2) 接点の y 座標が $-\sqrt{3}$

3 (0145)

円 $x^2+y^2=4$ の接線で，次のようなものの方程式を求めなさい。

(1) x 軸に平行　　　　(2) y 軸に平行

➜これまでは，中心が原点である円について考えました。こんどは，中心が原点以外の点である円について考えます。

〔2〕円の接線の方程式(2)

◇円 $(x-1)^2+(y+3)^2=5$ 上の点における接線の方程式

中心が点 $(1,\ -3)$ である円

$$(x-1)^2+(y+3)^2=5 \quad \cdots\cdots①$$

上の点 $(3,\ -2)$ における接線の方程式を，平行移動の考え方を使って求めましょう。

円①は，円 $x^2+y^2=5$ ………②を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものですね。

この平行移動で，円①上の点 $(3,-2)$ に移る円②上の点は，$3-1=2$，$-2-(-3)=1$ から，点 $(2,\ 1)$ です。

だから，点 $(3,\ -2)$ における円①の接線は，点 $(2,\ 1)$ における円②の接線を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものです。

ところで，点 $(2,\ 1)$ における円②の接線の方程式は

$$2\cdot x+1\cdot y=5$$

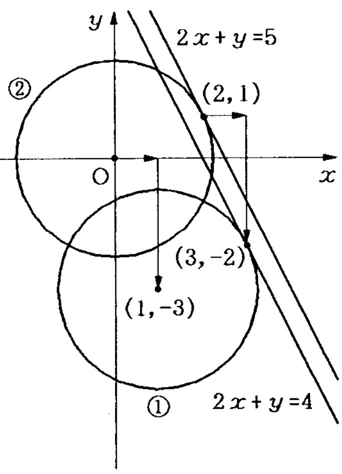
すなわち　$2x+y=5$

です。

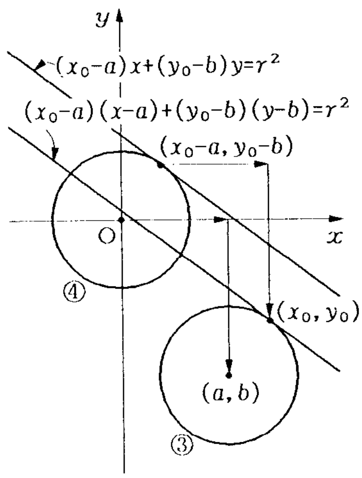
だから，求める接線の方程式は，次のようになります。

$$2(x-1)+\{y-(-3)\}=5$$

すなわち　$2x+y=4$



◇円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点における接線の方程式



一般に，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ………③上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めてみましょう。

円③は，円 $x^2+y^2=r^2$ ………④を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものです。

そして，この平行移動で，円③上の点 (x_0, y_0) に移る円④上の点は (x_0-a, y_0-b) です。

だから，点 (x_0, y_0) における円③の接線は，点 (x_0-a, y_0-b) における円④の接線

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y=r^2$$

を，x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものです。

だから，求める接線の方程式は

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

となります。

◇接点が与えられたときの円の接線の方程式の公式

上で調べたことをまとめると，次のようになります。

> 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は
> $$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

➜少し式が長くなりますが，形が整っていますから覚えやすいですね。さっそく利用してみましょう。

例題 1　　接点が与えられたときの円の接線の方程式(2)

円 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ で，次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) 点 $(0, -3)$　　　　(2) 点 $(-8, 1)$

◆ 考え方 ◆

点 $(0, -3)$ も点 $(-8, 1)$ も，円 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ 上の点ですから，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式の公式

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

を使います。

この公式に，与えられた円の方程式から a，b，r^2，与えられた点の x 座標から x_0，y 座標から y_0 の値を求めて代入します。

◆ 解　答 ◆

(1) 接線の方程式の公式から

$$(0+3)(x+3)+\{(-3)-1\}(y-1)=25$$

すなわち　$3x-4y=12$

(2) 接線の方程式の公式から

$$(-8+3)(x+3)+(1-1)(y-1)=25$$

すなわち　　$x=-8$

➜代入する値がたくさんありますから，きちんと確かめて，まちがえないようにしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0146)

円 $(x-5)^2+(y+2)^2=100$ で，次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1)　$(-1,\ 6)$　　　　(2)　$(5,\ 8)$

5 ＊ (0147)

円 $(x-3)^2+(y+5)^2=26$ の接線で，次のようなものの方程式を求めなさい。

(1)　接点の x 座標が 2　　　　(2)　接点の y 座標が -6

6 ＊ (0148)

円 $(x+1)^2+(y+2)^2=16$ の接線で，次のようなものの方程式を求めなさい。

(1)　x 軸に平行　　　　(2)　y 軸に平行

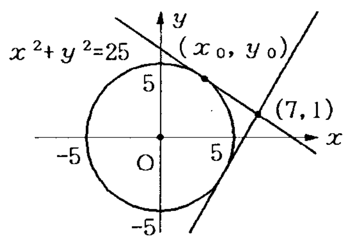
➜接点が与えられているときの円の接線の方程式は求められるようになりましたね。では，このことを利用して，接点が与えられていないときの円の接線の方程式の求め方を考えましょう。

例題 2　円外の点からひいた接線の方程式

点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

点 $(7,\ 1)$ は，$x^2+y^2=25$ を満たしませんから，この円上の点ではありません。だから，まず接点 $(x_0,\ y_0)$ を求めることを考えます。



すると，求める接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=25 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

と表されます。

この直線が点 $(7,\ 1)$ を通ることから

$$x_0\cdot 7+y_0\cdot 1=25$$

です。

また，接点は円 $x^2+y^2=25$ 上の点だから，$x_0{}^2+y_0{}^2=25$ です。

この 2 つの x_0，y_0 についての方程式を連立方程式として解き，その値を①にあてはめます。

◆ 解　答 ◆

求める接線の接点を $(x_0,\ y_0)$ とすると，その方程式は

$$x_0x+y_0y=25 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

これが点 $(7,\ 1)$ を通るから

$$7x_0+y_0=25 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

また，点 $(x_0,\ y_0)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上の点だから

$$x_0{}^2+y_0{}^2=25 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

②，③を連立方程式として解くと

$$x_0=4,\ y_0=-3 \quad \text{または} \quad x_0=3,\ y_0=4$$

これらを①に代入して

$x_0=4$，$y_0=-3$ のとき　$4x-3y=25$

$x_0=3$，$y_0=4$ のとき　$3x+4y=25$

➜点 (7，1) は，接線の通る点であって，接点ではないことをきちんとおさえましょう。

■■■トレーニング■■■

7 ＊ (0149)

円 $x^2+y^2=2$ の接線で，点 $(-1,\ 3)$ を通るものの方程式を求めなさい。

8 ＊ (0150)

円 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ の接線で，点 $(2,\ 1)$ を通るものの方程式を求めなさい。

9 ＊ (0151)

円 $x^2+y^2=4$ の接線で，傾き 2 のものの方程式を求めなさい。

10 ＊ (0152)

円 $x^2+y^2=25$ に点 $(-1,\ 7)$ からひいた 2 つの接線は直交することを証明しなさい。

➜ここまでできればもうじゅうぶんですが，まだがんばってみる気力のある人は，次の問題にも挑戦してみましょう。
この問題は，難問です。やってみて歯が立たないようだったら，解答を見てもかまいません。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

11 ＊ (0153)

円外の点 $(x_0,\ y_0)$ から円 $x^2+y^2=r^2$ に 2 つの接線をひくとき，2 つの接点を通る直線の方程式を求めなさい。

➜ごくろうさま。ここでの学習は，これで終わりです。

まとめておこう！

1. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は
$$x_0x+y_0y=r^2$$
2. 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は
$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

§ 17　円の接線(2)　判別式や点と直線との距離の公式を利用する方法

前回は，円の接線の方程式を接点の座標から求めることを学習しました。今回は，接点の座標を使わずに求める方法を考えてみます。そして，接線の方程式が自由自在に求められるようになったら，接線の方程式からもとの円の方程式を求めてみましょう。

➜ まず，円の接線の方程式を求めるのに，2 次方程式の判別式を利用する方法から学習します。

例題 1　　判別式を利用した円の接線の求め方

点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=9$ に接する直線の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

円と直線が接するための条件を方程式で考えると，円の方程式と直線の方程式から x または y を消去してできる 2 次方程式で，判別式が 0 になることです。

ところで，求める接線の方程式は，傾きを m とすると，$y-1=m(x-3)$ です。だから，判別式$=0$ から，m の値を求めることを考えます。

ここで，注意しなければいけないのは，傾きを使って表すことのできる直線は，y 軸に平行でないものです。だから，y 軸に平行な接線がないかどうかを調べなければいけません。

◆ 解　答 ◆

点 $(3,\ 1)$ を通って，y 軸に平行な直線の方程式は

$x=3$　………①

➜ y 軸に平行な接線がないかどうかを調べます。

これを $x^2+y^2=9$ ………②に代入すると

$$3^2+y^2=9$$
$$y^2=0$$
$$y=0$$

よって，重解をもつから，直線①は円②の接線である。

点 $(3,\ 1)$ を通って，y 軸に平行でない直線の方程式は，傾きを m とすると

➜ y 軸に平行でない接線の方程式を求めます。

$y-1=m(x-3)$

すなわち　$y=mx-3m+1$　………③

③を②に代入して

$$x^2+(mx-3m+1)^2=9$$
$$(m^2+1)x^2+2(-3m^2+m)x+9m^2-6m-8=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とおくと，直線③が円②に接するとき

$$\frac{D}{4}=(-3m^2+m)^2-(m^2+1)\cdot(9m^2-6m-8)=0$$
$$6m+8=0$$
$$m=-\frac{4}{3}$$

これを③に代入して　　$y=-\frac{4}{3}x+5$

したがって，求める接線の方程式は　　$x=3$，$y=-\frac{4}{3}x+5$

➜円外の点から円へひいた接線は2本あります。1本求めて安心してしまってはいけません。

➜判別式を利用すると，接点を求めなくても接線の方程式が求められるのですね。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0154)

点 (4，1) を通り，円 $x^2+y^2=10$ ………①に接する直線の方程式を，判別式を利用して，求めなさい。

2 ＊ (0155)

円 $x^2+y^2=10$ ………①の接線で，傾き $-\frac{1}{2}$ のものの方程式を，判別式を利用して，求めなさい。

3 ＊ (0156)

2つの円 $x^2+y^2=1$ ………①，$x^2+(y-4)^2=4$ ………②に接する直線の方程式を求めなさい。

➜判別式を使って円の接線を求める方法はわかりましたね。さて，次は，図形としての接線の性質を利用する方法です。

例題2　　点と直線との距離を利用した円の接線の求め方

点 (−2，4) を通り，円 $x^2+y^2=10$ に接する直線の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

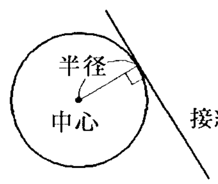
円と直線が接するとき，円の中心と直線との距離は，円の半径に等しくなっています。

ところで，求める接線の方程式は，傾きを m とすると

$$y-4=m(x+2)$$

ですから

中心と接線との距離＝半径



から，m についての方程式をつくります。そして，それを解いて m の値を求めます。

このときも，y 軸に平行な接線がないかどうかを確かめましょう。

◆ 解　答 ◆

点 (−2，4) を通って，y 軸に平行な直線の方程式は

$x=-2$　　………①

円 $x^2+y^2=10$ ………②の中心 (0，0) から直線①までの距離は $|-2|=2$ で，円②の半径 $\sqrt{10}$ に等しくない。

よって，直線①は円②の接線でない。

点 (−2，4) を通って，y 軸に平行でない直線の方程式は，傾きを m とすると

$$y-4=m\{x-(-2)\}$$

すなわち　$mx-y+2m+4=0$　………③

直線③が円②に接するとき，円②の中心 $(0,\ 0)$ から直線③までの距離は $\sqrt{10}$ だから

$$\frac{|m\cdot 0-0+2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$　➜中心と接線との距離 = 半径

両辺を平方して分母をはらうと

$$(2m+4)^2=10(m^2+1)$$

展開して整理すると

$$-6m^2+16m+6=0$$
$$3m^2-8m-3=0$$
$$(3m+1)(m-3)=0$$
$$m=-\frac{1}{3},\ 3$$

これを③に代入して

$m=-\dfrac{1}{3}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

$m=3$ のとき　$y=3x+10$

したがって，求める接線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$，$y=3x+10$

➜やはり，y 軸に平行な接線がないかどうか調べることを忘れないようにしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 ＊ (0157)

点 $(1,\ -3)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ ………①に接する直線の方程式を，点と直線との距離を利用して，求めなさい。

5 ＊ (0158)

円 $x^2+y^2=20$ ………①の接線で，傾き -1 のものの方程式を，点と直線との距離を利用して，求めなさい。

➜円が与えられたときの接線の方程式は求められるようになりましたね。こんどは，接線が与えられたときの円の方程式を求めましょう。

例題3　　**円の方程式の決定**

中心が円 $x^2+y^2-4x+2y=0$ と同じで，直線 $y=2x+5$ に接する円の方程式を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

中心と半径がわかれば，円の方程式は求められます。

いま，中心は，円 $x^2+y^2-4x+2y=0$ と同じですから，この式を変形すると求められます。

また，半径は，中心と接線 $y=2x+5$ との距離で求められます。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-4x+2y=0$ を変形すると　$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

よって，中心は　点 $(2,\ -1)$

また，半径は，点 $(2,\ -1)$ と直線 $y=2x+5$ との距離に等しい。
$y=2x+5$ は $2x-y+5=0$ だから

$$\frac{|2\cdot2-(-1)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{10}{\sqrt{5}}$$
$$=2\sqrt{5}$$

したがって，求める円の方程式は　$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2=(2\sqrt{5})^2$
すなわち　$(x-2)^2+(y+1)^2=20$

➜基本的な円の性質や，円の接線の性質を利用していますから，むずかしくはありませんね。それでは，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

6 ＊ (0159)
円 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ ………①と中心が同じで，直線 $2x+3y=8$ ………②に接する円の方程式を求めなさい。

7 ＊ (0160)
直線 $y=x+1$ 上に中心をもち，点 P$(5,\ 2)$ を通り，直線 $y=3-x$ ………①に接する円の方程式を求めなさい。

8 ＊ (0161)
円 A は，円 O：$x^2+y^2=25$ 上の点 P$(-4,\ 3)$ において円 O と共通な接線をもち，点 Q$(2+3\sqrt{6},\ 0)$ を通ります。円 A の方程式を求めなさい。

➜接点 $(-4,\ 3)$ を通る円 $x^2+y^2=25$ の半径は，直線 $y=-\frac{3}{4}x$ 上にあります。
求める円の中心もこの直線上にあります。

➜円の接線の方程式にはいろいろな求め方があることがわかりましたね。それでは，まだ力の余っている人は，次のような接線の問題にも挑戦してみましょう。

もっと力をつけよう

■■■トレーニング■■■

9 ＊ (0162)
円 O：$x^2+y^2+ax+by+c=0$ ………①の外の点 P $(x_0,\ y_0)$ からこの円にひいた接線の長さは，$\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c}$ であることを示しなさい。

➜円の接線の求め方は，もう完全に理解できましたね。どの場合，どの方法が便利という特別なきまりはありませんから，どれか自分で得意な方法を見つけておくのもよいでしょう。それでは，答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

円の接線の求め方には，次のようなものがあります。

1. 接点を(x_0, y_0)とおいて，円$x^2+y^2=r^2$の接線の方程式の公式 $x_0x+y_0y=r^2$を使う方法
2. 円の方程式と直線の方程式から，xまたはyを消去した２次方程式で，判別式＝0 を利用する方法
3. 円の中心と接線との距離＝半径 を利用する方法

§18　2つの円の位置関係

これまでに，2直線の位置関係や円と直線の位置関係について学習しましたね。ここでは，2つの円の位置関係を方程式を使って考えてみます。考え方は2直線の場合や，円と直線の場合と同じですが，2円の場合は，方程式がどちらも2次方程式であることが少しだけめんどうです。

➜それでは，2円の共有点の座標をそれらの方程式から求めることを考えましょう。

〔1〕2円の共有点と方程式

◇2円の共有点と連立方程式の解

円は，たとえば

$x^2+y^2-9=0$ ………①,　　$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ ………②

のような x，y についての2次方程式で表すことができますね。

そして，円上の点は，その解になっている実数の組 $(x,\ y)$ で表されます。

さらに，2円の共有点はそのどちらの上にもある点ですから，共有点の座標はそれらの方程式を連立方程式としたときの解から求められます。

◇2つの円の方程式からつくった2元2次連立方程式の解き方

上の円①，②の方程式は，どちらも2次方程式ですね。

この①，②からつくった2次と2次の2元2次連立方程式は，どのようにして解くのでしょうか。

まず，x，y の間の関係を変えずに，これまですでに解き方を学習した

$$\begin{cases}1\text{次方程式}\\1\text{次方程式}\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}1\text{次方程式}\\2\text{次方程式}\end{cases}$$

の形に直せないかどうかを考えてみましょう。

ここで，円の方程式の形の特徴に着目すると，x^2，y^2 の係数が等しく，xy の項を含まない2次方程式ですね。

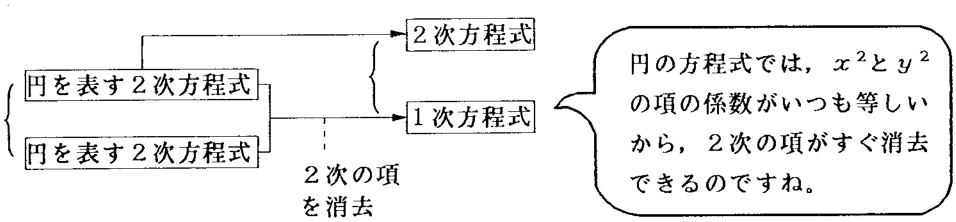
だから，① − ②を計算すると

$2x-4y-10=0$　　………③

となり，2次の項が消去されて，x，y についての1次方程式ができます。

③は，①，②の両方を満たす x，y についての関係を表す式ですから，①と②の連立方程式を解く代わりに，①と③という，2次と1次の連立方程式を解けばよいことがわかります。

➜②と③でもかまいません。



➜では，さっそく２円の方程式からつくった２元２次連立方程式を解いて，共有点の座標を求めてみましょう。

例題１　　２つの円の共有点の座標

２つの円 $x^2+y^2-5=0$，$x^2+y^2-3x-y-4=0$ の共有点の座標を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

２つの円の方程式を連立方程式として解き，その解 x，y の組 (x, y) をつくると，それが共有点の座標です。

この連立方程式を解くには,２つの方程式から２次の項を消去して１次方程式を導き，それともとの円の方程式の１つとでつくった連立方程式に直して解きます。

◆ 解　答 ◆

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-3x-y-4=0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−②から　$3x+y-1=0$　➜２次の項を消去します。

$y=-3x+1$　………③

③を①に代入して

$$x^2+(-3x+1)^2-5=0$$
$$10x^2-6x-4=0$$
$$5x^2-3x-2=0$$
$$(5x+2)(x-1)=0$$
$$x=-\frac{2}{5},\ 1$$

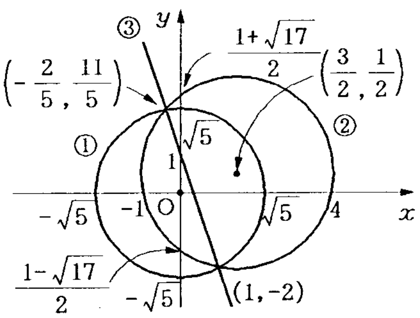
これを③に代入して

$x=-\dfrac{2}{5}$ のとき　$y=\dfrac{11}{5}$

$x=1$ のとき　$y=-2$

したがって，共有点の座標は　$\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$，$(1,\ -2)$

➜図に示すと，次のようになります。



③ともとの円の方程式から連立方程式をつくるとき，①，②のどちらでもかまいませんが，式の簡単なほうが，計算も楽です。

➜２次と２次の連立方程式を解くことになりますが，２次の項が簡単に消去できる形になっているので楽ですね。では，少しトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0163)

次の２円の共有点の座標を求めなさい。

(1)　$x^2+y^2-5=0$ ………①，$x^2+y^2+x+y-8=0$ ………②
(2)　$x^2+y^2+7x+2y-4=0$ ………①，$x^2+y^2+4x+6y+8=0$ ………②

2 ＊ (0164)

2つの円 $x^2+y^2=9$，$x^2+y^2-7x-7y+12=0$ の交点をＰ，Ｑとします。線分ＰＱの長さを求めなさい。

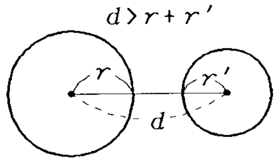
➜２円の共有点の座標は求められるようになりましたね。では，こんどは，２円の共有点の個数，つまり２円の位置関係を調べてみます。

〔2〕２円の位置関係

◇２円の位置関係

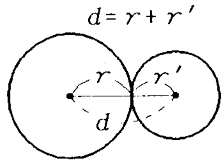
中学校で学習したように，平面上で，半径の異なる２つの円を考え，それぞれの半径を r，r'，中心間の距離を d とすると，その位置関係は次の５つの場合に分かれます。

$d>r+r'$



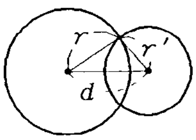
出会わない…共有点はなし

$d=r+r'$



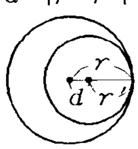
接する…共有点は１個

$|r-r'|<d<r+r'$



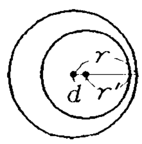
２点で交わる…共有点は２個

$d=|r-r'|$



接する…共有点は１個

$d<|r-r'|$



出会わない…共有点はなし

これは，共有点の個数で分類すると，次の３つの場合に分かれます。

共有点が２個 ……	２点で交わる ……	$\lvert r-r'\rvert<d<r+r'$
共有点が１個 ……	接する ……	$d=r+r'$，$d=\lvert r-r'\rvert$
共有点はなし ……	出会わない ……	$d>r+r'$，$d<\lvert r-r'\rvert$

◇判別式を使った２円の位置関係の調べ方

２円の共有点は，２円の方程式からつくった連立方程式の解を座標にもちますから，上の２円の位置関係は，その解の個数で調べることができます。

そして，前に学習したように，２円の方程式からつくった２次と２次の連立方程式は，１次と２次の連立方程式に直して解きます。

だから，直線と円の位置関係を調べたときと同じで，２つの方程式から，x または y を消去すると，残りの文字についての２次方程式が導かれ，その判別式 D で，次のように調べられます。

$D>0$ ……	異なる２つの解 ……	２円は２点で交わる
$D=0$ ……	１つの解 ……	２円は接する
$D<0$ ……	解なし ……	２円は出会わない

➜それでは，実際に２円の位置関係を調べてみましょう。

例題2　　2円の位置関係

2つの円 $x^2+y^2+4y-12=0$, $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ の位置関係を調べなさい。

◆ 考え方 ◆

半径の異なる2つの円で，それぞれの半径を r, r', 中心間の距離を d とすると，2円の位置関係は次のようになります。

$|r-r'|<d<r+r'$ のとき　　2点で交わる
$d=r+r'$ または $d=|r-r'|$ のとき　　接する
$d>r+r'$ または $d<|r-r'|$ のとき　　出会わない

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2+4y-12=0$ を変形すると　　➜中心と半径を使った形で表します。

$x^2+(y+2)^2=16$　　………①

$x^2+y^2-6x-4y+12=0$ を変形すると

$(x-3)^2+(y-2)^2=1$　　………②

円①，②の半径をそれぞれ r, r', 円①と②の中心間の距離を d とおくと

$r+r'=4+1=5$　　➜$r+r'$, $|r-r'|$ と d との関係を調べます。

$|r-r'|=|4-1|=3$

$d=\sqrt{(3-0)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，$d=r+r'$ だから，2円は接する。

◆ 別　解 ◆

次のようにして調べてもかまいません。

◆ 別の考え方 ◆

与えられた2つの2次方程式から，2次の項を消去して1次方程式を導きます。

つぎに，この1次方程式ともとの2次方程式の1つから，x または y を消去して，残りの文字についての2次方程式を導きます。この2次方程式の判別式 D の符号で，次のようになります。

$D>0$ のとき，2点で交わる　　$D=0$ のとき，接する　　$D<0$ のとき，出会わない

◆ 解　答 ◆

$$\begin{cases} x^2+y^2+4y-12=0 & \cdots\cdots\cdots① \\ x^2+y^2-6x-4y+12=0 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①−②から　　$6x+8y-24=0$　　➜2次の項を消去します。

$3x+4y-12=0$

$x=\dfrac{-4y+12}{3}$　　………③

③を①に代入して　　$\left(\dfrac{-4y+12}{3}\right)^2+y^2+4y-12=0$

$25y^2-60y+36=0$

この2次方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=(-30)^2-25\cdot36$$
$$=900-900$$
$$=0$$

したがって，2円は接する。

➜図形的な意味を考える方法と，2次方程式の解の個数を考えて判別式を調べる方法

があるのですね。トレーニングして，どちらででも調べられるようになりましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0165)

次の２円の位置関係を，判別式を利用して調べなさい。

(1)　$x^2+y^2=2$ ………①，$x^2+y^2-2x+2y-6=0$ ………②

(2)　$x^2+y^2-12x+10y-51=0$ ………①，$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ ………②

4 ＊ (0166)

次の２円の位置関係を，中心間の距離を利用して調べなさい。

(1)　$(x-3)^2+y^2=5$ ………①，$x^2+y^2=1$ ………②

(2)　$(x+2)^2+(y+4)^2=16$ ………①，$(x+1)^2+(y-2)^2=1$ ………②

➜２円の位置関係は調べられるようになりましたね。最後に，２円が示された位置関係になるように，もとの円の位置を定めてみます。

例題３　　２円の位置の決定

２円 $x^2+y^2-9=0$，$x^2+y^2+2ax-2y+a^2-3=0$ が２点で交わるように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，係数に a を含む２次方程式が円を表す条件，つまり (半径)$^2>0$ を調べます。

次に，与えられた２円の半径を r，r'，中心間の距離を d とすると

２点で交わるとき　　$|r-r'|<d<r+r'$

接するとき　　$d=r+r'$ または $d=|r-r'|$

出会わないとき　　$d>r+r'$ または $d<|r-r'|$

という関係がありますから，これを a についての方程式や不等式で表して解きます。

そして，これらの共通範囲を求めます。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-9=0$ を変形すると，$x^2+y^2=9$ だから

中心 $(0,\ 0)$，半径３

$x^2+y^2+2ax-2y+a^2-3=0$ を変形すると，$(x+a)^2+(y-1)^2=4$ だから

中心 $(-a,\ 1)$，半径２　　➜ (半径)$^2>0$ を満たしています。

よって，２円が２点で交わるとき

$$|3-2|<\sqrt{(-a)^2+1^2}<3+2 \qquad ➜ |r-r'|<d<r+r'$$

$$1<\sqrt{a^2+1}<5$$

$1<\sqrt{a^2+1}$ から　$1^2<a^2+1$

$0<a^2$

よって　$a\neq 0$　………①

$\sqrt{a^2+1}<5$ から　$a^2+1<5^2$

$a^2<24$

よって　$-2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}$　………②

①，②から　$-2\sqrt{6}<a<0$，$0<a<2\sqrt{6}$　➜①と②の共通範囲です。

◆ 別　解 ◆

次のように，判別式を使って求める方法もあります。

◆解　答◆

$$\begin{cases} x^2+y^2-9=0 & \cdots\cdots\cdots① \\ x^2+y^2+2ax-2y+a^2-3=0 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

②は，$(2a)^2+(-2)^2-4\cdot(a^2-3)=16>0$ だから，円を表す。

➜ $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は，$l^2+m^2-4n>0$ のとき，円を表します。

また，①－②から　$-2ax+2y-a^2-6=0$

$$y=\frac{2ax+a^2+6}{2}$$

これを①に代入して整理すると

$$4(1+a^2)x^2+4a(a^2+6)x+a^4+12a^2=0$$

この2次方程式の判別式を D とおくと，2円が2点で交わるとき

$$\frac{D}{4}=\{2a(a^2+6)\}^2-4(1+a^2)\cdot(a^4+12a^2)>0$$

$$a^2(-a^2+24)>0$$

これを解いて　$-2\sqrt{6}<a<0,\ 0<a<2\sqrt{6}$

➜およその解き方はわかりましたね。細かい点については，次のトレーニングの中で確認しましょう。

■■■トレーニング■■■

5 ＊ (0167)

2円 $(x+1)^2+(y-3)^2=9\cdots\cdots\cdots①$，$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2\cdots\cdots\cdots②$が出会わないように，判別式を利用して，定数 r の値の範囲を定めなさい。ただし，$r>0$ とします。

6 ＊ (0168)

2円 $(x+1)^2+(y-3)^2=9\cdots\cdots\cdots①$，$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2\cdots\cdots\cdots②$が出会わないように，中心間の距離を利用して，定数 r の値の範囲を定めなさい。ただし，$r>0$ とします。

7 ＊ (0169)

2円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-x+ky-k-\frac{3}{4}=0$ が接するように，定数 k の値を定めなさい。ただし，$k>0$ とします。

8 ＊ (0170)

2円 $x^2+y^2+4y-5=0$，$x^2+y^2-2kx+y+k^2=0$ が少なくとも1つの共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めなさい。

➜少なくとも1つというのは，1つまたは2つということですね。

➜ここでは，2つの円の共有点について学習しました。それでは，いつものように，答え合わせをして終わりにしましょう。

まとめておこう！

1.　２円の共有点の座標は，それらの方程式を連立方程式として解いたときの解で求められます。

2.　２円の位置関係を調べるには，次の(1)，(2)の方法があります。

(1)　２円の半径をそれぞれr，r'，中心間の距離をdとすると

$|r-r'|<d<r+r'$ ……… ２点で交わる

$d=r+r'$，$d=|r-r'|$ …… 接する

$d>r+r'$，$d<|r-r'|$ …… 出会わない

(2)　２円の方程式から，xまたはyを消去して，残りの文字についての２次方程式を導き，その判別式をDとすると

$D>0$……２点で交わる

$D=0$……接する

$D<0$……出会わない

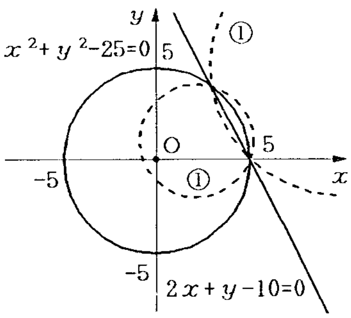
§ 19　円や直線の交点を通る図形の方程式

前に，2 直線の交点を通る直線の方程式を，交点を求めないで表す方法を学習しましたね。ここでは，同じように考えて，円や直線の交点を通る図形や，2 つの円の交点を通る図形の方程式の表し方を学習します。似ている点や違いに注意して学習を進めましょう。

➜まず，円と直線の交点を通る円の方程式について学習しましょう。

〔1〕円と直線の交点を通る円の方程式

◇円 $x^2+y^2-25=0$ と直線 $2x+y-10=0$ の交点を通る図形



方程式

$$x^2+y^2-25+k(2x+y-10)=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

は，$x^2+y^2-25=0$，$2x+y-10=0$ であれば，k の値にかかわらず成り立ちます。

つまり，k がどんな値のときでも，円 $x^2+y^2-25=0$ と直線 $2x+y-10=0$ の交点を通る図形を表します。

そして，①を x，y について整理すると

$$x^2+y^2+2kx+ky-10k-25=0$$

と，x^2，y^2 の係数が等しく，xy の項を含まない x，y についての 2 次方程式になります。

また，$(2k)^2+k^2-4(-10k-25)=5k^2+40k+100=5(k+4)^2+20>0$ ですから，①は円を表します。

◇円と直線の交点を通る円の方程式

一般に，円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ ………②と直線 $ax+by+c=0$ ………③が 2 点で交わるとき，その交点の座標は次の方程式を満たします。

$$x^2+y^2+lx+my+n+k(ax+by+c)=0 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

そして，2 点で交わるとき，円の中心と直線との距離は半径より小さいから

$$\frac{\left|a\cdot\left(-\frac{l}{2}\right)+b\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}<\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$$

すなわち　$l^2+m^2-4n-\dfrac{(la+mb-2c)^2}{a^2+b^2}>0$

このとき，④を x，y について整理した方程式

$x^2+y^2+(l+ka)x+(m+kb)y+(n+kc)=0$ で

$$\begin{aligned}&(l+ka)^2+(m+kb)^2-4(n+kc)\\&=(a^2+b^2)k^2+2(la+mb-2c)k+(l^2+m^2-4n)\\&=(a^2+b^2)\left(k+\frac{la+mb-2c}{a^2+b^2}\right)^2+l^2+m^2-4n-\frac{(la+mb-2c)^2}{a^2+b^2}\\&>0\end{aligned}$$

ですから，確かに④は円を表します。すなわち，円②と直線③の交点を通る円は，方程式④で表されます。

→では，実際に④の公式を使って，円の方程式を求めてみましょう。

例題1 円と直線の交点を通る円の方程式

円 $x^2+y^2-34=0$ と直線 $x+y-8=0$ の交点と，点 (3, 3) を通る円の方程式を求めなさい。

◆考え方◆

与えられた円と直線の交点を通る円の方程式を，定数 k を使って

$$x^2+y^2-34+k(x+y-8)=0$$

とします。

つぎに，この円が点 (3, 3) を通ることから，方程式に $x=3$, $y=3$ を代入して k の値を求めます。

◆解　答◆

円 $x^2+y^2-34=0$ と直線 $x+y-8=0$ の交点を通る円の方程式は

$$x^2+y^2-34+k(x+y-8)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。

円①が点 (3, 3) を通るから

$$3^2+3^2-34+k(3+3-8)=0$$
$$-16-2k=0$$

よって　$k=-8$

これを①に代入して　$x^2+y^2-34-8(x+y-8)=0$

すなわち　$x^2+y^2-8x-8y+30=0$

→前に，2直線の交点を通る直線の方程式を求めたときと，要領は全く同じですね。
では，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0171)

円 $x^2+y^2-3x+y=0$ と直線 $x+3y-1=0$ の交点を通り，半径2の円の方程式を求めなさい。

2 ＊ (0172)

円 $x^2+y^2-4=0$ と直線 $x-2y+2=0$ の交点を通り，中心が $(-1, 2)$ の円の方程式を求めなさい。

3 ＊ (0173)

直線 $x-3y-2=0$ と円 $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ の交点を通り，x 軸に接する円の方程式を求めなさい。

→では，次に，2円の交点を通る図形について考えましょう。

〔2〕2円の交点を通る図形の方程式

◇2円の交点を通る図形を表す方程式

方程式 $x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-6x)=0$ は，$x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-6x=0$ であれば，k の値にかかわらず成り立ちますね。

つまり，k がどんな値のときでも，円 $x^2+y^2-4=0$ と円 $x^2+y^2-6x=0$ の交点を通る図形を表します。

一般に，2円

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ ………①と $x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ ………②

が2点で交わるとき，方程式

$$x^2+y^2+lx+my+n+k(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0 \quad \cdots\cdots③$$

は，2円の交点を通る図形を表します。

◇直線を表す場合

上の③の方程式を x，y について整理してみましょう。

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(l+kl')x+(m+km')y+(n+kn')=0 \quad \cdots\cdots④$$

となりますね。

ここで，$1+k=0$ のとき，すなわち $k=-1$ のときを考えると

$$(l-l')x+(m-m')y+(n-n')=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

と，2次の項がなくなって，x，y についての1次式になります。

そして，円①と円②は，2点で交わるのですから，その中心は一致しません。

つまり，$-\dfrac{l}{2} \neq -\dfrac{l'}{2}$ または $-\dfrac{m}{2} \neq -\dfrac{m'}{2}$ から，$l-l' \neq 0$ または $m-m' \neq 0$ ですから，⑤は直線を表します。

◇円を表す場合

上の④の方程式で，$1+k \neq 0$ のとき，すなわち，$k \neq -1$ のときを考えると x^2，y^2 の係数が等しく，xy の項を含まない2次方程式ですね。

円①と円②が2点で交わることから，方程式④は円を表します。

◇2円の交点を通る図形を表す方程式

ここまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

> 2円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$，$x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ が2点で交わるとき，方程式
>
> $$x^2+y^2+lx+my+n+k(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$$
>
> k は定数
>
> は，その交点を通る図形を表す。
>
> この方程式は，$k=-1$ のとき直線，$k \neq -1$ のとき円を表す。

〈注意〉 $k \neq -1$ のとき，交点を通る円のうち $x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ でないものは，すべてこの式で表されることがわかります。

つまり，円 $x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ だけは，この形で表せません。

$k=-1$ のとき，この方程式は交点を通る直線，すなわち2円の共通弦を表しま

す。2円が接するときには，共通接線を表します。

→定数 k の値によって，1つの方程式が円を表したり，直線を表したりするのですね。注意して使い分けましょう。

例題2 2円の交点を通る図形の方程式

2円 $x^2+y^2-5=0$，$x^2+y^2-3x-y-4=0$ の交点と原点を通る円の方程式を求めなさい。

◆考え方◆

与えられた2円の交点を通る円の方程式を，-1 でない定数 k を使って

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

とします。

次に，この円が原点を通ることから，方程式に $x=0$，$y=0$ を代入して，k の値を求めます。

◆解　答◆

与えられた2円の交点を通る円の方程式を

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-3x-y-4)=0 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$$\text{ただし，}k \neq -1 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

とする。

円①が原点を通るためには

$$0^2+0^2-5+k(0^2+0^2-3\cdot0-0-4)=0$$

$$-5-4k=0$$

よって　$k=-\dfrac{5}{4}$

これは②を満たす。

したがって，これを①に代入して

$$x^2+y^2-5-\frac{5}{4}(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

すなわち　$x^2+y^2-15x-5y=0$

→2円の交点を通る図形が，円，直線とはっきり示されているときは，それで，k の値のとり方がきまってくることを忘れないようにしましょう。

■■■トレーニング■■■

4 * (0174)

2円 $x^2+y^2-6=0$，$x^2+y^2-3x-y-3=0$ の交点を通る直線の方程式を求めなさい。

5 * (0175)

次の円の方程式を求めなさい。

(1) 2円 $x^2+y^2-10=0$，$x^2+y^2-2x+3y=0$ の交点と点 $(2,\ 1)$ を通る円

(2) 2円 $x^2+y^2-x+2y+1=0$，$x^2+y^2-6x-4y-3=0$ の交点と原点を通る円

→こんどは，円や直線の交点を通る直線の方程式から，もとの円の方程式を求めてみましょう。

例題3　円や直線の交点を通る図形の方程式

2つの円 $x^2+y^2-5=0$，$x^2+y^2+4x+ay-25=0$ の2つの交点を通る直線の方程式が $x+3y-5=0$ になるように，定数 a の値を定めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，係数に文字を含む方程式 $x^2+y^2+4x+ay-25=0$ が円を表すための a の条件を求めます。つぎに，2円が2点で交わるための a の条件を求めます。

そして，与えられた2円の2つの交点を通る直線の方程式を

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2+4x+ay-25)=0$$

で，$k=-1$ として求めます。

これが直線 $x+3y-5=0$ に等しくなるように a の値を定め，上の条件を満たすことを確かめます。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-5=0$　………①

$x^2+y^2+4x+ay-25=0$　………②

②が円を表すから　$4^2+a^2-4\cdot(-25)>0$

➜まず，②が円を表す条件を求めます。

すなわち　$a^2+116>0$

これは，すべての実数 a について成り立つ。

➜次に，2円①，②が2点で交わる条件を求めます。

また，①−②から　$-4x-ay+20=0$

$$x=\frac{-ay+20}{4}$$

これを①に代入して整理すると　$(a^2+16)y^2-40ay+320=0$

この2次方程式の判別式を D とおくと，2円①，②が2点で交わるから

$$\frac{D}{4}=(-20a)^2-(a^2+16)\cdot 320>0$$

$$a^2-64>0$$

すなわち　$a<-8$ または $8<a$　………③

2円①，②の交点を通る直線の方程式は

➜2円①，②の交点を通る直線の方程式を，a を使って表します。

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2+4x+ay-25)=0$$

で，$k=-1$ の場合だから

$$x^2+y^2-5-(x^2+y^2+4x+ay-25)=0$$

すなわち　$-4x-ay+20=0$

これが直線 $x+3y-5=0$ と一致するとき　$\dfrac{-4}{1}=\dfrac{-a}{3}=\dfrac{20}{-5}$

したがって　$a=12$

これは③を満たす。

よって　$a=12$

➜係数に文字を含む方程式では，それが示された図形を表す条件や，示された位置関係にあるための条件を確かめましょう。
なお，次のように考えて解くこともできます。
円 $x^2+y^2-5=0$ と直線 $x+3y-5=0$ の交点をまず求め（2つの交点は $(2,\ 1)$ と $(-1,\ 2)$ になります），その2つの交点を円 $x^2+y^2+4x+ay-25=0$ が通るように，a の値を定めます。

■■■トレーニング■■■

6 * (0176)

円 $x^2+y^2-25=0$ ………①と直線 $x+ay+5=0$ ………②の２つの交点を通る円の方程式が $x^2+y^2+2x-4y-15=0$ ………③になるように，定数 a の値を定めなさい。

7 * (0177)

２円 $x^2+y^2-4=0$ ………①，$x^2+y^2-4x+ay+4=0$ ………②の２つの交点を通る直線の方程式が $2x-y-4=0$ ………③になるように，定数 a の値を定めなさい。

8 * (0178)

２円 $x^2+y^2-5=0$ ………①，$x^2+y^2+6x+ay-12=0$ ………②の２つの交点を通る円の方程式が $x^2+y^2-6x-y+2=0$ ………③になるように，定数 a の値を定めなさい。

➜ごくろうさま。ここでの学習は，これで終わりです。答え合わせを忘れずにしておきましょう。

まとめておこう！

1. 円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ と直線 $ax+by+c=0$ が２点で交わるとき，その交点を通る円の方程式は

$$x^2+y^2+lx+my+n+k(ax+by+c)=0$$

2. ２円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$，$x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ が２点で交わるとき，方程式

$$x^2+y^2+lx+my+n+k(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$$

k は定数

は，その交点を通る図形を表します。

この方程式は，$k=-1$ のとき直線，$k\neq-1$ のとき円を表します。

§ 20　不等式の表す領域　1次不等式，円の内部・外部

これまでに，座標平面上で，1次方程式 $y=-2x+1$ は直線を，2次方程式 $x^2+y^2=4$ は円を表すことを学習しましたね。今回は，これらの方程式の等号を不等号でおきかえた $y>-2x+1$，$x^2+y^2<4$ などの不等式が，どのようなものを表すかを学習します。

➡まず，はじめに，$y>-2x+1$ や $x<2$ などの不等式が何を表すかを調べてみましょう。

〔1〕直線で分けられる平面

◇不等式 $y>-2x+1$ を満たす点の集合

座標平面上で，たとえば，不等式 $y>-2x+1$ ………①を満たす点 $(x,\ y)$ の集合が，どのようなものを表すか考えてみましょう。

そのために，①の不等号を等号におきかえた方程式 $y=-2x+1$ ………②の表す直線を考え，この直線上の点と比べながら調べます。

まず，直線②上の点は，明らかに不等式①を満たしませんね。

次に，点 $P(x_1,\ y_1)$ が不等式①を満たすとすると

$$y_1>-2x_1+1 \quad ………③$$

ですね。

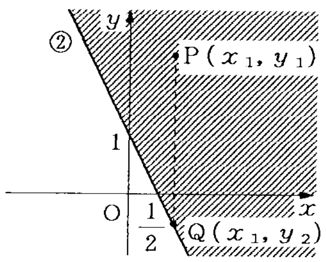
そして，点 P と同じ x 座標をもつ直線②上の点を $Q(x_1,\ y_2)$ とすると

$$y_2=-2x_1+1 \quad ………④$$

です。

③と④で，右辺は等しいから

$$y_1>y_2 \quad ………⑤$$



境界を含まない

P と Q は x 座標が等しいのですから，不等式⑤は P が Q より上にあることを意味しています。

また，逆に，P が Q より上にあれば，⑤が成り立ちます。

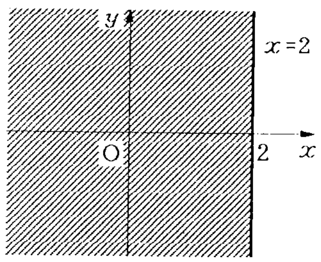
だから，不等式①を満たす点の集合は，直線②の上側の点の集合，つまり上の図の斜線の部分で，境界を含みません。

◇不等式 $x<2$ を満たす点の集合

次に，座標平面上で，不等式 $x<2$ ………⑥を満たす点 $(x,\ y)$ の集合を考えましょう。

不等式⑥は，y がどんな値をとっても，x の値が2より小さければ成り立ちます。

だから，直線 $x=2$ の左側の点 $(x,\ y)$ の集合，つまり右の図の斜線の部分で，境界を含みません。



境界を含まない

◇領域とその境界

これまで調べたことからわかるように

$y>-2x+1$ は，直線 $y=-2x+1$ の上側

$x<2$ は，直線 $x=2$ の左側

をそれぞれ表します。

このように，x，y についての不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の集合は，ふつう，ある広がりをもった図形になります。この図形をその不等式の表す領域といいます。

そして，$y>-2x+1$ や $x<2$ の表す領域で，直線 $y=-2x+1$ や $x=2$ が境界を表したように，1次不等式では不等号を等号でおきかえた方程式が領域の境界を表します。

◇直線で分けられる平面

これまで調べたことをもとに，直線で分けられる平面についてまとめると，次のようになります。

> $y>mx+n$ の表す領域は，直線 $y=mx+n$ の上側
> $y<mx+n$ の表す領域は，直線 $y=mx+n$ の下側
> $x>k$ の表す領域は，直線 $x=k$ の右側
> $x<k$ の表す領域は，直線 $x=k$ の左側

〈注意〉 上の領域は，いずれも境界を含みません。なお，$y \geqq mx+n$ は，$y>mx+n$ と $y=mx+n$ を合わせたもので，境界を含んだ領域を表します。

➜では，実際に，次の基本例題で，不等式 $y>mx+n$，$x<k$ などの表す領域を求めてみましょう。

基本例題1 直線で分けられる平面

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $y \leqq 3x-2$ (2) $x>-3$

◆ 考え方 ◆

それぞれの不等式で，不等号を等号でおきかえた方程式をつくり，そのグラフをかきます。これが境界になる直線です。

次に，不等号の向きから，領域が境界の上側，下側，右側，左側のどちらかを調べ，図示します。

最後に，等号がついているときは“境界を含む”，等号がついていないときは“境界を含まない”と書きます。

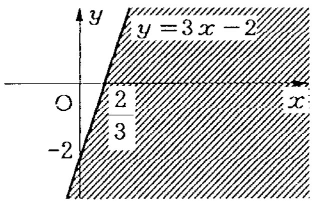
◆ 解 答 ◆

(1) 求める領域は，直線 $y=3x-2$ の下側になる。

➜ $y \leqq \boxed{}$ の形なので，下側です。

すなわち，次の図の斜線の部分で，境界を含む。

➜等号がついているので，境界を含みます。



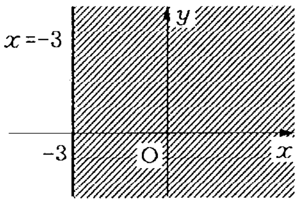
境界を含む

(2) 求める領域は，直線 $x=-3$ の右側になる。

➜ $x>\boxed{}$ の形なので，右側です。

すなわち，次の図の斜線の部分で，境界を含まない。

➜等号がついていないので，境界を含みません。



境界を含まない

➜領域が直線のどちら側になるのかに注意して，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0179)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $y>x-2$ (2) $y\geqq -2$

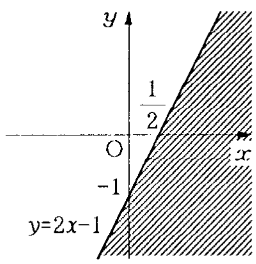
(3) $y\leqq -\dfrac{3}{2}x+1$ (4) $x<3$

➜ $>$ や $<$ は境界を含まない，$\geqq$ や $\leqq$ は境界を含むですね。

2 (0180)

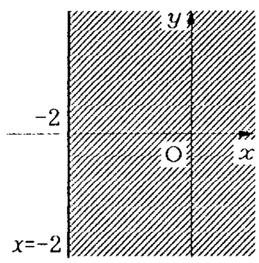
次の斜線部分は，どんな不等式で表されますか。

(1)



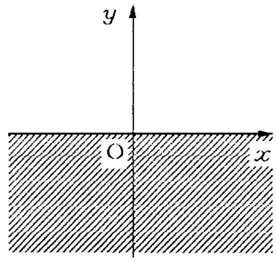
境界を含まない

(2)



境界を含む

(3)



境界を含む

➜では，次に，いろいろな1次不等式の表す領域を調べてみましょう。

〔2〕1次不等式の表す領域

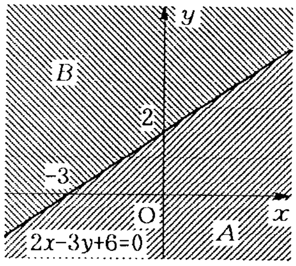
◇1次不等式の表す領域

不等式 $2x-3y+6>0$ ………①を y について解くと

$$y<\frac{2}{3}x+2$$

だから，その表す領域 A は直線 $y=\frac{2}{3}x+2$ の下側，つまり直線 $2x-3y+6=0$ ………②の下側です。

また，$2x-3y+6<0$ ………③は，$y>\frac{2}{3}x+2$ だから，その表す領域 B は，直線②の上側です。



境界を含まない

つまり，直線②に関して，不等式①と③は反対側の領域を表します。

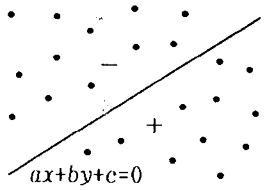
同じようにして考えるとわかるように，不等式 $2x+8>0$ と $2x+8<0$ は，直線 $2x+8=0$ に関して反対側の領域を表します。

このように，一般に，平面は，直線 $ax+by+c=0$ によって2つの領域に分けられ

一方の領域は　$ax+by+c>0$

他方の領域は　$ax+by+c<0$

です。このとき，直線上にない1点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ において，$ax_0+by_0+c>0$ ならば，点Aを含む側の領域は $ax+by+c>0$ の表す領域で，$ax_0+by_0+c<0$ ならば，点Aを含む側の領域は $ax+by+c<0$ の表す領域です。



だから，2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ について

$$ax_1+by_1+c,\qquad ax_2+by_2+c$$

が同符号であれば，P，Qは直線 $ax+by+c=0$ に関して同じ側にあり，異符号であれば，反対側にあります。

◇正の領域・負の領域

上の領域 A，B はそれぞれ

$$A=\{(x,\ y)\mid 2x-3y+6>0\}$$

$$B=\{(x,\ y)\mid 2x-3y+6<0\}$$

と表されます。

ところで，$f(x,\ y)=2x-3y+6$ とおくと

①は $f(x,\ y)>0$，③は $f(x,\ y)<0$

と表されます。

このように，x，y についての式 $f(x,\ y)$ について

$f(x,\ y)>0$ を満たす点の集合を $f(x,\ y)$ の正の領域

$f(x,\ y)<0$ を満たす点の集合を $f(x,\ y)$ の負の領域

といいます。

上の領域 A は $2x-3y+6$ の正の領域，B は $2x-3y+6$ の負の領域です。

➜ $f(x,\ y)$ の正の領域・負の領域は，$f(x,\ y)=0$ の上側，下側，または右側，左側とは関係ありません。どちらになるか，そのつど調べましょう。
それでは，$ax+by+c>0$ や $ax+by+c<0$ の形で表された1次不等式の表す領域を求めてみましょう。

基本例題２　　1次不等式の表す領域

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$2x+y+2<0$　　　　(2)　$6x-3\leqq 0$

◆ 考え方 ◆

与えられた1次不等式が y を含むときは，$y>mx+n$ または $y<mx+n$ の形に直します。

また，y を含まないときは，$x>k$ または $x<k$ の形に直します。

そして，直線で分けられる平面の考え方で領域を求めます。

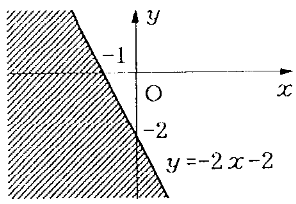
◆ 解　答 ◆

(1)　$2x+y+2<0$ を変形すると

$$y<-2x-2$$

したがって，求める領域は，直線 $y=-2x-2$ の下側になる。

すなわち，右の図の斜線の部分で，境界を含まない。



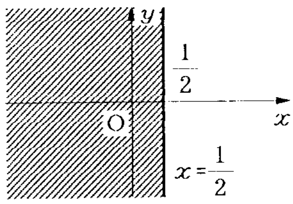
境界を含まない

(2)　$6x-3\leqq 0$ を変形すると

$$x\leqq\frac{1}{2}$$

したがって，求める領域は，直線 $x=\frac{1}{2}$ の左側になる。

すなわち，右の図の斜線の部分で，境界を含む。



境界を含む

◆ 別　解 ◆

求める領域が直線のどちら側にあたるか調べるときは，適当な1つの点を不等式にあてはめる方法もあります。多くの場合，原点を考えます。

◆ 解　答 ◆

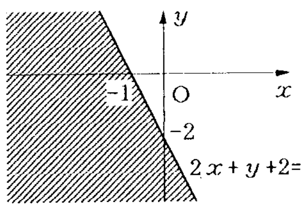
(1)　$x=0$，$y=0$ のとき

$$2x+y+2=2\cdot0+0+2=2$$

よって，$2x+y+2<0$ を満たさない。

したがって，求める領域は，直線 $2x+y+2=0$ に関して原点のない側になる。

すなわち，右の図の斜線の部分で，境界を含まない。



境界を含まない

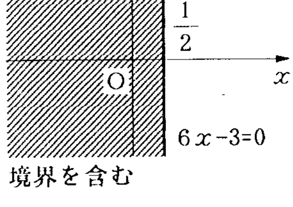
(2)　$x=0$，$y=0$ のとき

$$6x-3=6\cdot0-3=-3$$

よって，$6x-3\leqq 0$ を満たす。

したがって，求める領域は，直線 $6x-3=0$ に関して，原点のある側になる。

すなわち，右の図の斜線の部分で，境界を含む。



境界を含む

➜別解の方法は，$ax+by+c$ を同符号にする点の集合は，直線の一方の側にあ

ることを利用しているのですね。では，トレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

3 (0181)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $2x-y-1<0$　　(2) $4x+3y-6\leqq 0$

(3) $5x+7\geqq 0$　　(4) $3y-6>0$

4 (0182)

次の点は，直線 $4x+5y-20=0$ について，原点と同じ側にありますか，反対側にありますか。

(1) $(6,\ -2)$　　(2) $(8,\ 3)$

5 (0183)

点 $(3,\ a)$ が直線 $-3x+2y+5=0$ に関して原点と同じ側にあるとき，a の値の範囲を求めなさい。

➔ 1 次不等式の表す領域についてはわかりましたね。では，次に，$x^2+y^2<4$ のような 2 次不等式の表す領域について調べましょう。

〔3〕2 次不等式と円の内部・外部

◇ $x^2+y^2-4x+2y<0$ の表す領域

2 次不等式 $x^2+y^2-4x+2y<0$ の表す領域を調べてみましょう。

これを変形すると

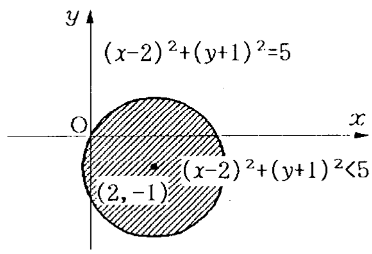
$$(x-2)^2+(y+1)^2<5$$

となります。

これは，$A(2,\ -1)$，$P(x,\ y)$ とすると

$$AP^2<5$$

を表しています。



境界を含まない

ここで，$AP>0$，$\sqrt{5}>0$ ですから，このことは

$AP<\sqrt{5}$　➔点 A から P までの距離が $\sqrt{5}$ より小さい。

すなわち，P が円 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ ………①の内部にあることを表しています。

同じように考えれば，$(x-2)^2+(y+1)^2>5$ は，$P(x,\ y)$ が円①の外部にあることを表していることがわかります。

◇円の内部・外部

上で調べたのと同じように考えると，一般に，次のことがわかります。

$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は
　　中心$(a,\ b)$，半径 r の円の内部
$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は
　　中心$(a,\ b)$，半径 r の円の外部

このことから，平面は，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ によって，２つの領域に分けられることがわかります。

〈注意〉 $r>0$ で，上の領域は，どちらも境界を含みません。

➜円の内部・外部を表す２次不等式についてはわかりましたね。それでは，次の基本例題の２次不等式はどんな領域を表すか調べましょう。

基本例題３　　２次不等式の表す領域

不等式 $x^2+y^2+2x-4y-5>0$ の表す領域を図示しなさい。

◆ 考え方 ◆

与えられた不等式を $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の形に直します。

そして，不等号を等号におきかえて方程式をつくり，そのグラフである円をかきます。これが境界です。

つぎに，不等号の向きから，領域がこの境界の内部か外部か調べ，図示します。

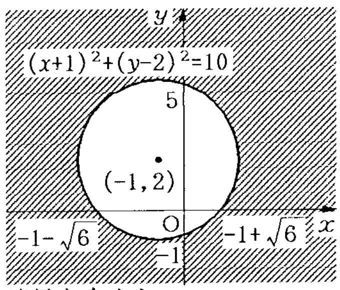
◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2+2x-4y-5>0$ を変形すると

$$(x+1)^2+(y-2)^2>10$$

したがって，求める領域は，中心$(-1,2)$，半径 $\sqrt{10}$ の円の外部になる。

すなわち，右の図の斜線の部分で，境界を含まない。



境界を含まない

➜では，不等号の向きや等号のあるなしに注意して，少しトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0184)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2<4$　　(2) $(x+2)^2+y^2\geqq 9$

7 (0185)

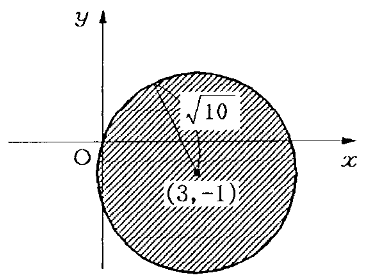
次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $x^2+y^2+4x-6y-3>0$　　(2) $x^2+y^2-2x-4y-4\leqq 0$

8 (0186)

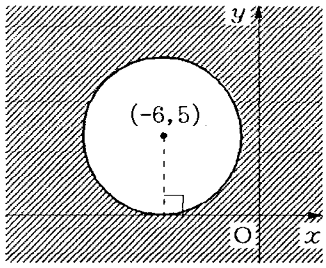
次の斜線部分は，どんな不等式で表されますか。

(1)



境界を含まない

(2)



境界を含む

9 (0187)

次の点は，円 $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ について，原点と同じ側にありますか，反対側にありますか。

(1) (1, 1)　　(2) (2, 4)

10 (0188)

点 $\left(\frac{1}{2},\ a\right)$ が，円 $x^2+y^2-6=0$ に関して，点 (1, −2) と同じ側にあるように，a の値の範囲を定めなさい。

➜今回は，不等式の表す領域について学習しました。次回からの学習の基礎になっていますから答え合わせをして，頭の中を整理してから終わりにしましょう。

まとめておこう！

1. 平面は，直線 $ax+by+c=0$ によって，2つの側に分けられ
   一方の側は　$ax+by+c>0$
   他方の側は　$ax+by+c<0$
2. x，y についての式 $f(x, y)$ について
   $f(x, y)>0$ を満たす点の集合を $f(x, y)$ の正の領域
   $f(x, y)<0$ を満たす点の集合を $f(x, y)$ の負の領域
   といいます。
3. $r>0$ のとき，$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は
   中心 (a, b)，半径 r の円の内部
   $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は
   中心 (a, b)，半径 r の円の外部

§ 21　連立不等式の表す領域(1)　連立2元1次，連立2元2次不等式

前回は，x，y についての1次不等式や2次不等式を1つ考えたとき，その表す領域について学習しましたね。今回は，x，y についての1次不等式や2次不等式を2つ組にしたとき，つまり連立不等式をつくったとき，それを満たす点の集合がどのような領域を表すか調べましょう。

➜まず，x，y についての1次不等式2つからつくった連立2元1次不等式の表す領域から調べます。

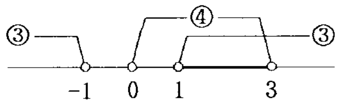
〔1〕連立不等式の表す領域

◇連立不等式の表す領域

たとえば，x，y についての連立方程式 $\begin{cases} x+2y+1=0 & \cdots\cdots\cdots① \\ 2x-3y+9=0 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$ の解は，方程式①，②を同時に満たす x，y の値の組で，$x=-3$，$y=1$ ですね。

また，x についての連立不等式 $\begin{cases} x^2-1>0 & \cdots\cdots\cdots③ \\ x^2-3x<0 & \cdots\cdots\cdots④ \end{cases}$

の解の集合は，不等式③，④を同時に満たす x の値の集合で，③の解の集合 $x<-1$ または $1<x$ と，④の解の集合 $0<x<3$ の共通部分 $1<x<3$ です。



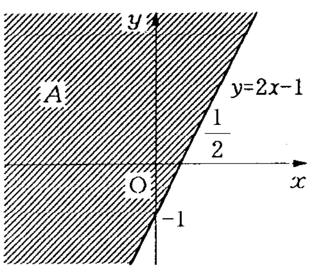
全く同じように，x，y についての連立不等式 $\begin{cases} 2x-y-1<0 & \cdots\cdots\cdots⑤ \\ x+y-1<0 & \cdots\cdots\cdots⑥ \end{cases}$ の表す領域は⑤，⑥を同時に満たす領域で，⑤の領域と⑥の表す領域の共通部分です。

◇連立不等式の表す領域の求め方

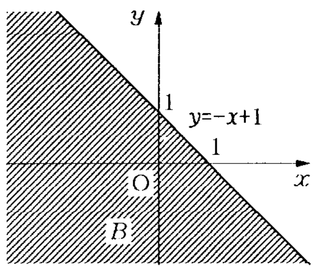
では，上の連立不等式 $\begin{cases} 2x-y-1<0 & \cdots\cdots\cdots⑤ \\ x+y-1<0 & \cdots\cdots\cdots⑥ \end{cases}$ の表す領域を図示するとどうなるか調べてみましょう。

⑤を変形すると $y>2x-1$ だから，その表す領域 A は直線 $y=2x-1$ の上側ですね。

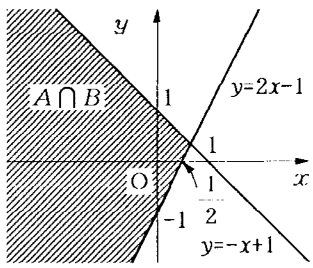
同様にして，⑥から $y<-x+1$ だから，その表す領域 B は直線 $y=-x+1$ の下側です。このA，Bをそれぞれ図示すると，下の左の2つの図の斜線の部分になり，どちらも境界を含みません。



境界を含まない



境界を含まない



境界を含まない

A と B の共通部分は，図では，A，B を1つの座標平面上に表したとき，A, B が重なった部分だから，上の右の図の斜線部分で，境界は含みません。

➜連立不等式は，それぞれの不等式の表す領域の共通部分を表すのですね。
　では，次の基本例題で，実際に連立2元1次不等式の表す領域を求めてみましょう。

基本例題 1　　　連立2元1次不等式の表す領域

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x+2y-1>0 \\ x-y<0 \end{cases}$　　　(2) $-4 \leqq x+2y \leqq 4$

◆ 考え方 ◆

まず，それぞれの不等式を $y \geqq mx+n$ または $y \leqq mx+n$ の形に直します。

そして，それぞれの不等式の表す領域の境界をかき，それぞれの不等式の表す領域が直線のどちら側になるかを不等号の向きから調べます。

上で調べた2つの領域の共通部分が求める領域です。

(2)は，与えられた不等式を2つの不等式の組で表します。

◆ 解　答 ◆

(1)　$x+2y-1>0$ を変形すると

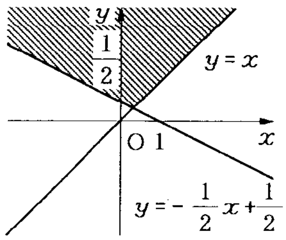
$$y>-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$x-y<0$ を変形すると

$$y>x \quad \cdots\cdots\cdots②$$

①は直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ の上側，②は直線 $y=x$ の上側で，いずれも境界を含まない。

したがって，求める領域は，右の図の斜線の部分で，境界を含まない。



境界を含まない

(2)　$-4 \leqq x+2y \leqq 4$ を書き直すと

$$\begin{cases} -4 \leqq x+2y & \cdots\cdots\cdots① \\ x+2y \leqq 4 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①を変形すると

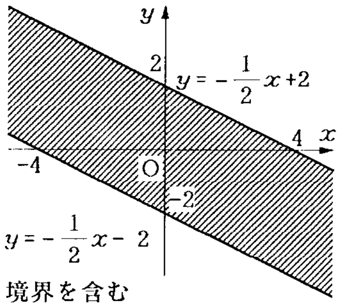
$$y \geqq -\frac{1}{2}x-2 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

②を変形すると

$$y \leqq -\frac{1}{2}x+2 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

③は直線 $y=-\frac{1}{2}x-2$ の上側，④は直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ の下側で，いずれも境界を含む。

したがって，求める領域は，上の図の斜線の部分で，境界を含む。



境界を含む

➜それぞれの不等式の表す領域さえ正確に求められれば，あとは簡単ですね。では，いつものように，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

1 (0189)

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} y \leqq x+2 \\ y \leqq -2x+5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y-1>0 \\ x+2y-4>0 \end{cases}$

2 (0190)

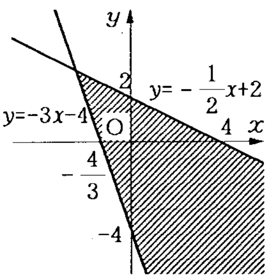
次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $-2<x+2y \leqq 1$　　(2) $|x+y|<1$

3 (0191)

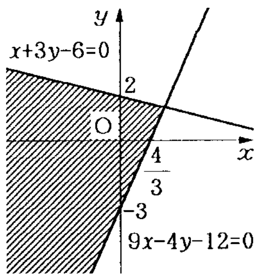
次の斜線で示された部分は，どんな不等式で表されますか。

(1)



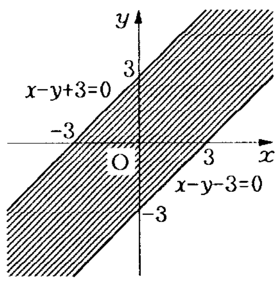
境界を含む

(2)



境界を含まない

(3)



境界を含まない

➜連立２元１次不等式の表す領域については，もう完璧ですね。では，次に，１次と２次の不等式の組の連立２元２次不等式の表す領域を調べましょう。

基本例題２　　**連立２元２次不等式の表す領域(1)**

連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1 \leqq 0 \\ x+2y+2 \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を図示しなさい。

◆ 考え方 ◆

１次不等式は $y \geqq mx+n$ または $y \leqq mx+n$ の形に，２次不等式は $(x-a)^2+(y-b)^2 \geqq r^2$ または $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq r^2$ の形に直します。

そして，それぞれの不等式の表す領域の境界をかきます。

次に，それぞれの不等式の表す領域を，不等号の向きから調べます。

上で調べた２つの領域の共通部分が求める領域です。

◆ 解　答 ◆

$x^2+y^2-2x+4y+1 \leqq 0$ を変形すると

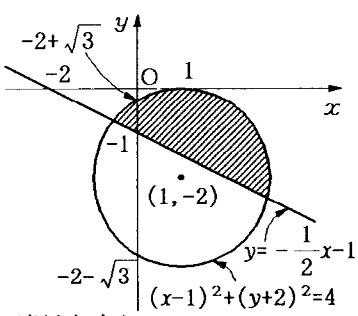
$$(x-1)^2+(y+2)^2 \leqq 4 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$x+2y+2 \geqq 0$ を変形すると

$$y \geqq -\frac{1}{2}x-1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①は中心 $(1,\ -2)$，半径２の円の内部，②は直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ の上側で，いずれも境界を含む。

したがって，求める領域は，右の図の斜線の部分で，境界を含む。



境界を含む

➜連立２元１次不等式の表す領域と比べると，直線の１つが円に変っただけで，考え方は全く同じですね。さあ，トレーニングをテキパキとすませましょう。

■■■トレーニング■■■

4　(0192)

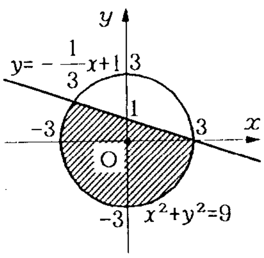
次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x-y-1\geqq 0 \\ x^2+y^2+2x+6y+2\leqq 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ x^2+y^2-2x-4y-4<0 \end{cases}$

5　(0193)

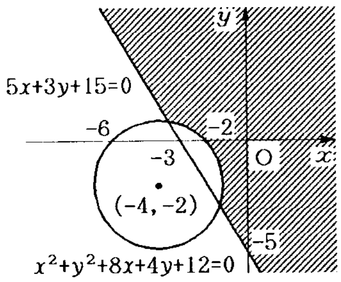
次の斜線で示された部分は，どんな不等式で表されますか。

(1)



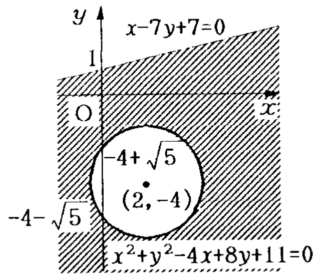
境界を含まない

(2)



境界を含む

(3)



境界を含まない

➜こんどは，２次と２次の不等式の組の連立２元２次不等式の表す領域を調べてみましょう。

基本例題３　　連立２元２次不等式の表す領域(2)

連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-8\leqq 0 \\ x^2+y^2+4x-4y-8\geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を図示しなさい。

◆解　答◆

$x^2+y^2-8\leqq 0$ を変形すると

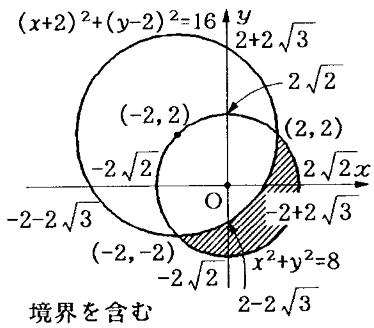
$$x^2+y^2\leqq 8 \quad \cdots\cdots①$$

$x^2+y^2+4x-4y-8\geqq 0$ を変形すると

$$(x+2)^2+(y-2)^2\geqq 16 \quad \cdots\cdots②$$

①は中心が原点，半径 $2\sqrt{2}$ の円の内部，②は中心 $(-2,\ 2)$，半径４の円の外部で，いずれも境界を含む。

したがって，求める領域は，右の図の斜線の部分で，境界を含む。



境界を含む

➜簡単ですね。でも，うっかりミスをしないように注意してトレーニングしましょう。

■■■トレーニング■■■

6 (0194)

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 4 \\ (x-3)^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-2>0 \\ x^2+y^2-2x-6y+9>0 \end{cases}$

7 (0195)

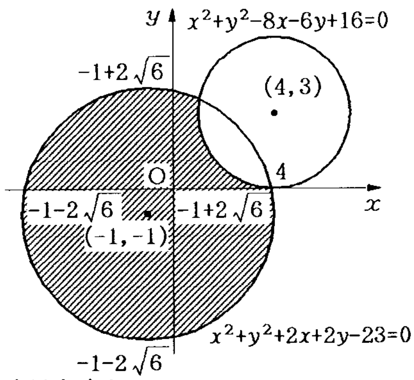
次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $1<x^2+y^2 \leqq 2$　　(2) $2x<x^2+y^2<4y$

8 (0196)

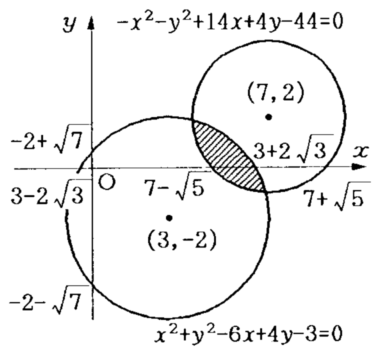
次の斜線で示された部分は，どんな不等式で表されますか。

(1)



境界を含む

(2)



境界を含まない

➜今回は，x，y についての不等式を２つ組にしてつくった連立不等式が，どんな領域を表すかを調べましたね。それでは，しめくくりに答え合わせをしましょう。

まとめておこう！

x，y についての連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式の表す領域の共通部分です。

§ 22　連立不等式の表す領域(2)　$A \cdot B>0$ の形の不等式など

今回も，前回にひきつづき，x，y についての連立不等式の表す領域について学習します。ここでは，3つの不等式の組の連立不等式や，$(x+y)(x-y)>0$ のように x，y についての2つの式の積で表された不等式がどのような領域を表すのか調べましょう。

➜まず，3つの不等式の組の連立不等式が表す領域について調べましょう。

基本例題 1　3つの不等式の連立不等式の表す領域

連立不等式 $\begin{cases} 2x-y+1>0 \\ x-3y-2<0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$ の表す領域を図示しなさい。

◆考え方◆

2つの不等式の組の連立不等式と同じように，まずそれぞれの不等式の表す領域を調べます。

そして，それらすべてに共通する部分が，求める連立不等式の表す領域です。

◆解　答◆

$2x-y+1>0$ を変形すると

$y<2x+1$　………①

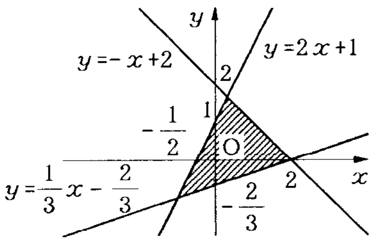
$x-3y-2<0$ を変形すると

$y>\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$　………②

$x+y-2<0$ を変形すると

$y<-x+2$　………③

①は直線 $y=2x+1$ の下側，②は直線 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ の上側，③は直線 $y=-x+2$ の下側で，いずれも境界を含まない。



境界を含まない

したがって，求める領域は，右の図の斜線の部分で，境界を含まない。

➜3本の直線で囲まれる三角形の内部になりましたね。
　共通する部分を求めるとき，3つの領域のすべてに共通する部分を求めるのです。

■■■トレーニング■■■

1　(0197)

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} y<x+3 \\ y<-2x+2 \\ y>-x \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y+2\geqq 0 \\ -x+2y-1\geqq 0 \\ 3x+2y-6\leqq 0 \end{cases}$

2 (0198)

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ y<-x \\ y>x \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2\geqq 1 \\ x^2+y^2-4x+2y+1\leqq 0 \\ x-y-1\geqq 0 \end{cases}$

➜では，次に，$A\cdot B>0$，$A\cdot B<0$ の形の不等式の表す領域を考えます。

〔1〕不等式 $A\cdot B>0$，$A\cdot B<0$ の表す領域

◇ $A\cdot B>0$，$A\cdot B<0$ の形の不等式

たとえば，$(x-y)(x+y-2)>0$ ………①という不等式について考えてみましょう。

この不等式は，x，y についての式 $x-y$ と $x+y-2$ の積が正であることを表します。

いいかえると，$x-y$ と $x+y-2$ が同符号であること，つまり

$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-2>0 \end{cases}$ ………②　または　$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$ ………③

ということです。

このように，2つの式 A，B について

$A\cdot B>0$ は　$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

$A\cdot B<0$ は　$\begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

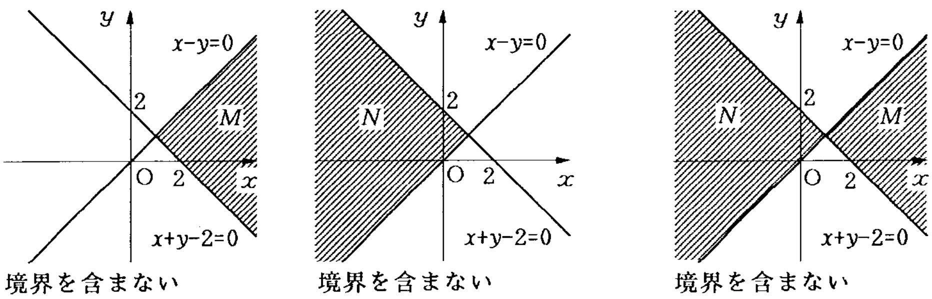
といいかえられます。

◇ $A\cdot B>0$，$A\cdot B<0$ の形の不等式の表す領域

では，上の不等式①の表す領域を調べてみましょう。

①は，②または③の形に直せますから，これを使って調べます。

連立不等式②の表す領域を M，連立不等式③の表す領域を N とすると，M，N は，それぞれ次の左の2つの図の斜線のようになり，どちらも境界を含みません。



境界を含まない　　境界を含まない　　境界を含まない

不等式①の表す領域は，この2つの領域 M，N の結び $M\cup N$ だから，上の右の図の斜線の部分になり，境界を含みません。

この図で，M，N が，境界で分けられる4つの領域のうち，1つおきの領域になっているように，ふつう，$A\fallingdotseq B$ のとき，$A\cdot B>0$ や $A\cdot B<0$ の形の不等式の表す領域は，それを満たす領域が1つわかれば，そこから1つおきの領域として求められます。

➜1つの不等式を2つの連立不等式に直して考えるのですね。実際に，領域を求めてみましょう。

例題 1　　$A\cdot B>0$，$A\cdot B<0$ の形の不等式の表す領域

不等式 $(x+y+2)(x-2y+6)>0$ の表す領域を図示しなさい。

◆ 考え方 ◆

与えられた不等式を 2 つの連立不等式

$$\begin{cases} x+y+2>0 \\ x-2y+6>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y+2<0 \\ x-2y+6<0 \end{cases}$$

に分けて，それぞれの連立不等式の表す領域を図示します。

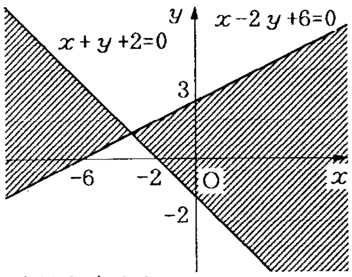
この 2 つの領域を合わせたものが，求める領域です。

◆ 解　答 ◆

$(x+y+2)(x-2y+6)>0$ を書き直すと

$$\begin{cases} x+y+2>0 \\ x-2y+6>0 \end{cases}$$

$$\text{または} \quad \begin{cases} x+y+2<0 \\ x-2y+6<0 \end{cases}$$



境界を含まない

したがって，求める領域は，この 2 つの連立不等式の表す領域を合わせたもので，右の図の斜線の部分になる。

ただし，境界を含まない。

◆ 別の考え方 ◆

$A\cdot B>0$ や $A\cdot B<0$ の形の不等式の表す領域が，境界で分けられた領域のうち，1 つおきになることを利用して，次のように求めることもできます。

◆ 解　答 ◆

$(x+y+2)(x-2y+6)=0$ から

$x+y+2=0$ ………①

または　$x-2y+6=0$ ………②

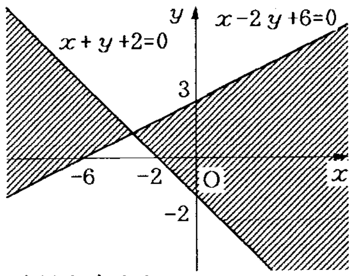
➜境界の方程式を求めます。

また，$x=0$，$y=0$ のとき

$(x+y+2)(x-2y+6)$

$=(0+0+2)(0-2\cdot0+6)$

$=12>0$



境界を含まない

だから，$(x+y+2)(x-2y+6)>0$ を満たす。

➜求める領域が原点を含むかどうか調べます。

したがって，求める領域は，直線①，②で分けられる領域のうち，原点を含む領域から 1 つおきの領域である。

すなわち，上の図の斜線の部分で，境界を含まない。

〈注意〉　ここでは，領域を 1 つ求めるとき，原点で調べましたが，境界上にない点であれば，どの点でもかまいません。

➜さあ，考え方はわかりましたね。トレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0199)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$(x+y-3)(x-2y+2)\geqq 0$

(2)　$x^2-3xy+(2y^2-y-1)<0$　（東海大）

➜ x，y についての２次式でも，x^2，y^2 の係数がちがうときや xy の項を含むときは，円を表しません。(2)は，まず因数分解しましょう。

4 ＊ (0200)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$(x^2+y^2-4x)(x^2+y^2-2y)\leqq 0$

(2)　$(x^2+y^2+4x)(x^2+y^2-4x-6y+4)>0$

5 ＊ (0201)

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$x^2-y^2-2x+1<0$　　(2)　$x^3+y^3+x^2y+xy^2-x-y\geqq 0$

6 ＊ (0202)

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ (x-y-2)(x+2y-2)<0 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y\leqq 0 \\ (x+3y-2)(x-2y+3)\geqq 0 \end{cases}$

➜ ここまでできれば，不等式の表す領域についてはもう心配ありません。次は，一歩進んで応用問題を解いてみましょう。

例題２　連立不等式の表す領域の利用

直線 $y=ax+b$ が，２点 A(1，1)，B(1，2) を結ぶ線分と A，B 以外の点で共有点をもつとき，点 $(a,\ b)$ はどんな領域にありますか。

◆ 考え方 ◆

直線 $y=ax+b$ は，a，b の値をいろいろ変えると y 軸に平行な直線以外のすべての直線を表すので，考えづらいですね。そこで，次のように考えます。

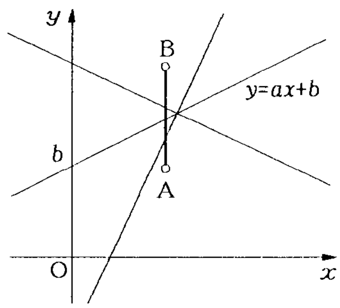
平面は，直線によって正の領域と負の領域の２つに分けられます。

点 A，B が，それぞれ正・負別の領域にあれば，直線と線分 AB は交わることになります。

つまり，$f(x,\ y)=y-ax-b$ とおくとき

$$f(1,\ 1)\cdot f(1,\ 2)<0$$

が成り立てばよいことになります。



◆ 解　答 ◆

A，B は直線 $y=ax+b$，すなわち $y-ax-b=0$ に関して反対側にあるから

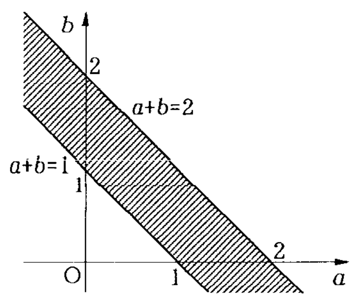
$$(1-a\cdot 1-b)(2-a\cdot 1-b)<0$$

すなわち

$$(a+b-1)(a+b-2)<0$$

よって　$1<a+b<2$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分で，境界を含まない。



境界を含まない

➜順を追って，ていねいに考えていけばわかりますね。では，同じような問題を解いてみましょう。

■■■トレーニング■■■

7 * (0203)

直線 $ax+by+1=0$ ………①が，2点 A(3, 2)，B(−1, 4) を結ぶ線分と A，B 以外の点で共有点をもつとき，点 $(a,\ b)$ はどんな領域にありますか。

8 * (0204)

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ に関して，2点 A(2, 1)，B(1, 2) は，一方が内部にあれば他方は外部にあります。この円の中心 $(a,\ b)$ はどんな領域にありますか。

➜ごくろうさま。終わりのほうは少しむずかしかったかもしれませんが，よくがんばりましたね。答え合わせがすんだら，ひと休みしましょう。

まとめておこう！

1. 2つの式A, Bについて

$$A\cdot B>0 \text{ は } \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$$

$$A\cdot B<0 \text{ は } \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$$

といいかえられます。

2. $A \fallingdotseq B$のとき，$A\cdot B>0$や，$A\cdot B<0$の形の不等式の表す領域は，境界で分けられた領域の中で，その不等式を満たす領域が1つわかれば，そこから1つおきの領域として求められます。

§ 23　不等式の表す領域と最大値・最小値

これまでに学習した x，y についての連立不等式の表す領域については，きちんと理解できていますね。今回は，その応用として，領域内の点 $(x,\ y)$ について，$2x+y$ のような x，y についての 1 次式の最大値や最小値を求めてみましょう。

➜まず，直線で囲まれた領域で，1 次式の最大値・最小値の求め方を学習しましょう。

〔1〕不等式の表す領域と最大値・最小値

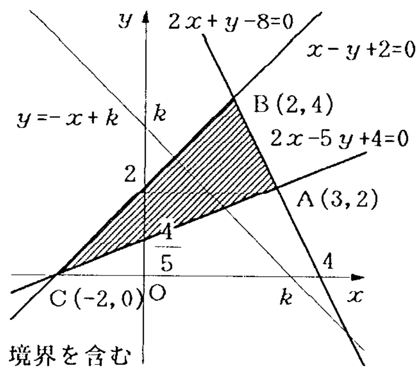
◇ 1 次式 $x+y$ のとる値の意味

点 $(x,\ y)$ が，連立不等式

$$2x+y-8\leqq 0,\quad 2x-5y+4\leqq 0,\quad x-y+2\geqq 0 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

の表す領域を動くとき，x，y についての 1 次式 $x+y$ の最大値・最小値の求め方を考えてみましょう。

①の表す領域は，右の図のように，三角形の周とその内部になりますね。



では，$x+y$ のとる値は右の図のどこに表れるのでしょうか。

いま，k を定数として

$$x+y=k$$

とおいてみましょう。

これは，書き直すと

$$y=-x+k \quad \cdots\cdots\text{②}$$

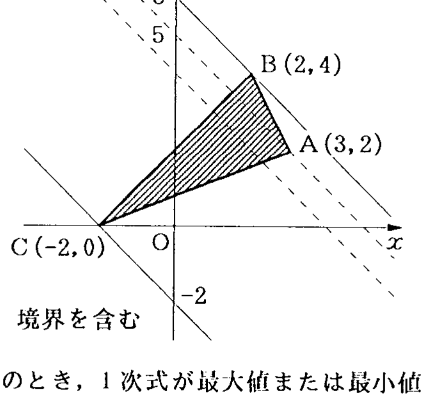
で，傾きが -1，y 切片が k の直線を表しますね。

つまり，$x+y$ のとる値は，直線②の y 切片です。

◇最大値・最小値をとるときの点

直線②は，傾きが -1 で一定ですから，k の値がいろいろ変わると平行に移動します。

だから，$x+y$ の最大値・最小値を求めるには，直線②が①で表される領域内の点 $(x,\ y)$ を通って，y 切片が最大・最小になるときを調べればよいわけですね。



この場合は，右の図からわかるように，直線②が

頂点 B$(2,\ 4)$ を通るとき，

y 切片は 6 で最大

頂点 C$(-2,\ 0)$ を通るとき，

y 切片は -2 で最小

となります。

つまり，$x+y$ の最大値は 6，最小値は -2 です。

このように，ふつう，領域が多角形の周とその内部のとき，1 次式が最大値または最小値をもつ点は，その多角形の頂点のどれかです。

→考え方の趣旨はわかりましたね。それでは，具体的な問題を考えて，細かい部分まで理解することにしましょう。

例題 1　　不等式の表す領域と最大値・最小値(1)

点 $(x,\ y)$ が，連立不等式

$$2x-y-5\leqq 0,\quad -x+3y-5\leqq 0,\quad x+2y-5\geqq 0$$

の表す領域を動くとき，$x+y$ の最大値・最小値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，連立不等式の表す領域を図示します。

次に，$x+y$ を定数 k とおきます。つまり，直線 $x+y=k$ を考えます。

これを y について解き，k の値が大きくなるとどちらの方向に平行移動するか考えます。

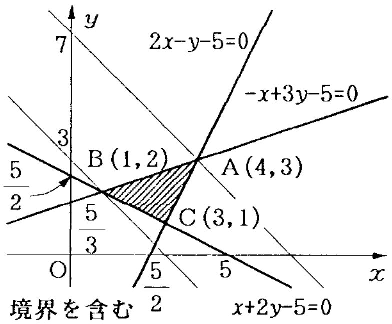
そして，頂点を通るときの k の値を比べて，その最大値，最小値を求めます。

◆ 解　答 ◆

連立不等式

$$2x-y-5\leqq 0,\quad -x+3y-5\leqq 0,$$
$$x+2y-5\geqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線の部分，つまり A(4, 3)，B(1, 2)，C(3, 1) を頂点とする △ABC の周とその内部である。



境界を含む

$x+y=k$ とおくと

$$y=-x+k \quad \cdots\cdots①$$

①は，傾きが -1，y 切片が k の直線で，k の値を変えると平行移動する。

そして，図からわかるように

A(4, 3) を通るとき，y 切片は最大

B(1, 2) を通るとき，y 切片は最小

である。

したがって，$x+y$ は

$x=4,\ y=3$ のとき　　最大値 7

$x=1,\ y=2$ のとき　　最小値 3

をとる。

→ y 切片が最大・最小になるのがどの点を通るときかは，直線の傾きで変わりますから，図は正確にかきましょう。

■■■トレーニング■■■

1 ＊ (0205)

点 $(x,\ y)$ が，連立不等式

$$-x+3y-10\leqq 0,\quad -7x+2y+25\geqq 0,\quad 5x+4y-7\geqq 0$$

の表す領域を動くとき，$x+2y$ の最大値・最小値を求めなさい。

2 ＊ (0206)

点 $(x,\ y)$ が，連立不等式

$$-4x+3y-6 \leqq 0, \quad 2x+y-12 \leqq 0, \quad -x+5y-5 \geqq 0$$

の表す領域を動くとき，$x-y$ の最大値・最小値を求めなさい。

➜これまでは，直線で囲まれた領域での１次式の最大値・最小値を調べましたね。こんどは，直線と円で囲まれた領域で調べてみましょう。

例題２　　不等式の表す領域と最大値・最小値(2)

点$(x,\ y)$が，連立不等式

$$2x+y-1 \geqq 0, \quad x-2y \leqq 0, \quad x^2+y^2-10 \leqq 0$$

の表す領域を動くとき，$x+y$ の最大値・最小値を求めなさい。

◆ 考え方 ◆

まず，連立不等式の表す領域を図示します。この領域は，境界の一部が円弧になります。

次に，$x+y$ を定数 k とおいて，直線 $x+y=k$ を考えます。

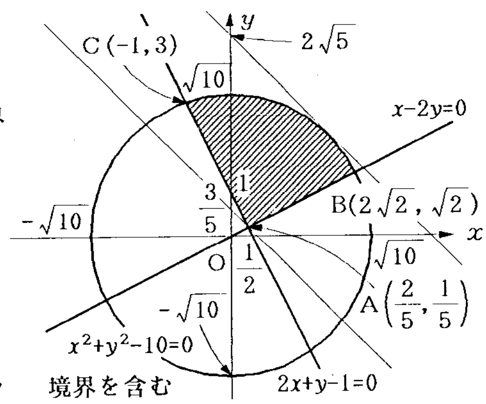
領域が多角形ではありませんから，最大値・最小値をとるのは，境界の交点とは限りません。境界の交点を通るときと，円と直線が接するときの k の値を調べて，最大値・最小値を求めます。

◆ 解　答 ◆

連立不等式

$$2x+y-1 \geqq 0, \quad x-2y \leqq 0,$$
$$x^2+y^2-10 \leqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線の部分で，境界を含む。



そして，$A\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$，$B(2\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$C(-1,\ 3)$ である。

$x+y=k$ とおくと

$$y=-x+k \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①は，傾きが -1，y 切片が k の直線で，k の値を変えると平行移動する。

そして，図からわかるように，右の領域内で

円 $x^2+y^2=10$ ………②と接するとき，y 切片は最大

点 $A\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ を通るとき，y 切片は最小

である。

ところで，①と②から，y を消去すると

$$x^2+(-x+k)^2=10$$
$$2x^2-2kx+k^2-10=0$$

この２次方程式の判別式を D とおくと，直線①と円②が接するとき

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2\cdot(k^2-10)=0$$
$$k^2-20=0$$
$$k=\pm 2\sqrt{5}$$

図から，領域内で接するとき $k>0$ だから　　$k=2\sqrt{5}$

また，このとき　　$x=\dfrac{k}{2}=\sqrt{5}$

よって　　$y=-x+k=-\sqrt{5}+2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

したがって，$x+y$ は

$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき　　最大値 $2\sqrt{5}$

$x=\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{1}{5}$ のとき　　最小値 $\dfrac{3}{5}$

をとる。

➜境界の一部が円弧のときは，直線が境界の交点を通るときだけでなく，円と接する場合も調べてみなければいけないのですね。少しトレーニングしてみましょう。

■■■トレーニング■■■

3 ＊ (0207)

$x^2+y^2\leqq 5$ のとき，$2x-y$ の最大値・最小値を求めなさい。

4 ＊ (0208)

点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$2x+y\geqq 0,\qquad x+2y-2\geqq 0,\qquad x^2+y^2-2x-7\leqq 0$$

の表す領域を動くとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めなさい。

➜それでは，これまで学習したことを身のまわりのことがらに利用してみましょう。

例題 3　不等式の表す領域と最大値・最小値の利用

700kg の材料で，A，B 2 種類の製品をつくります。

A，B の製作には，費用は 1 個あたりそれぞれ 80 円，50 円かかり，材料は 1 個あたり，それぞれ 2kg，3kg 必要です。

総費用が 17500 円以下で，A，B の製品の個数の和を最も多くするには，A，B それぞれ何個ずつつくればよいですか。

◆ 考え方 ◆

まず，問題を整理して式で表してみましょう。

A を x 個，B を y 個つくるとすると，費用，材料の制限から

$$80x+50y\leqq 17500,\qquad 2x+3y\leqq 700$$

です。また，問題の性質上，x，y は負でない整数という制限もつきます。

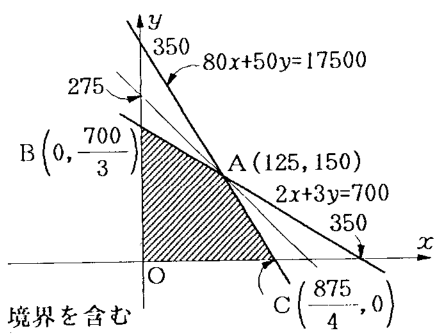
だから，この問題は，上の制限をすべて満たす点 $(x,\ y)$ について，$x+y$ の最大値を求めるものと考えられます。

◆ 解　答 ◆

A を x 個，B を y 個つくるとすると

$$\begin{cases} 80x+50y\leqq 17500 \\ 2x+3y\leqq 700 \qquad \cdots\cdots ① \\ x\geqq 0,\quad y\geqq 0 \end{cases}$$

よって，点 $(x,\ y)$ が連立不等式①の表す領域の整数値をとるときの $x+y$ の最大値を求めればよい。



連立不等式①の表す領域は，右の図の斜線の部分，つまり A(125，150)，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{700}{3}\right)$，O(0，0)，$\mathrm{C}\left(\dfrac{875}{4},\ 0\right)$ を頂点とする四角形 ABOC の周とその内部である。

$x+y=k$ とおくと　　$y=-x+k$　　………②

②は，傾きが -1，y 切片が k の直線で，k の値を変えると平行移動する。

そして，図からわかるように

A(125，150) を通るとき，y 切片は最大

である。

よって，$x+y$ は

$x=125$，$y=150$ のとき　　最大値 275

をとる。

したがって　A を 125 個，B を 150 個つくればよい。

➜まず，どのような条件で何を求めればよいのかをはっきりさせることがたいせつですね。では，トレーニングに移りましょう。

■■■トレーニング■■■

5 * (0209)

8 トンの材料で，A，B 2 種類の製品をつくるとき，費用は 1 個あたりそれぞれ 20000 円，30000 円かかり，材料は 1 個あたりそれぞれ 2 トン，1 トン必要です。

総費用 120000 円以下で，A，B の製品の個数の和を最大にするには，それぞれ何個ずつつくればよいですか。

6 * (0210)

2 種類の食品 A，B について，熱量は 1 g あたりそれぞれ 3 カロリー，2 カロリーで，たんぱく質は 1 g あたりそれぞれ 0.2 g，0.3 g 含まれています。

食品 A，B だけで 60 カロリー以上の熱量と 6 g 以上のたんぱく質をとるのに，A，B の合計量を最小にするには，それぞれ何 g ずつとればよいですか。

➜ごくろうさま。計算のめんどうなものもありましたが，がんばりましたね。では，しめくくりに，答え合わせをきちんとしましょう。

TRAINING PAPER

DAILY PROGRAM

高校数学／数学 II